This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

BIBLIOGRAPHIC RECORD TARGET

Graduate Library
University of Michigan

Preservation Office

Storage Number: _____

AAN8913
UL FMT B RT a BL m T/C DT 09/12/88 R/DT 04/05/89 CC STAT mm E/L 1
035/1: : |a (RLIN)MIUG84-B50917
035/2: : |a (CaOTULAS)160099281
040: : |a MiU |c MiU
100:1 : |a Beyda, Heinrich Friedrich Theodor.
245:00: |a Mathematische beschäftigungen aus früheren jahren, |c von Heinrich Friedrich Theodor Beyda.
260: : |a Stuttgart, |b J. B. Metzler, |c 1883.
300/1: : |a 3 p. L., [3], 289, [1] p. |b incl. diagrs. |c 23 cm.
650/1: 0: |a Mathematics.
998/1: : |c KLB |s 9124

Scanned by Imagenes Digitales
Nogales, AZ

On behalf of
Preservation Division
The University of Michigan Libraries

Date work Began: _____
Camera Operator: _____

Hosted by Google

Mathematische Beschäftigungen

aus früheren Jahren

von

Heinrich Friedrich Theodor Beyda.

Stuttgart.
Verlag der J. B. Metzlerschen Buchhandlung.
1883.

Hosted by Google

Druck der J. B. Metzlerschen Buchdruckerei.

Hosted by Google

Inhalt.

1) Von den Parallel-Linien 1
2) Der stereometrische Satz des Archimedes 17
3) Trigonometrische Formeln nebst einigen daraus hergeleiteten Lehrsätzen 49
4) Geometrisches, besonders das Verhältniß der Peripherie eines Kreises zu dem Durchmesser zu bestimmen 123
5) Trigonometrisches; von den Abschnitten der trigonometrischen Linien und namentlich der Tangente 155
6) Rechnung des Unendlichen in seiner Verbindung mit endlichen Größen und dem Nichtseienden 231

Hosted by Google

Hosted by Google

I.

Von den Parallellinien.

Aus dem Jahre 1869.

Hosted by Google

Hosted by Google

Von den Parallellinien.

Bei der Lehre von den Parallellinien hat man einige Schwierigkeiten getroffen. Denn wenn es auch leicht war, die Bedingungen anzugeben, unter welchen zwei Linien (unter Linien schlechthin sind immer die geraden in derselben Ebene zu denken) sich niemals schneiden würden, so fand man für den umgekehrten Fall, daß zwei Parallellinien diesen Bedingungen genügten, keinen strengen Erweis vor, welchen doch immer die Mathematik bei jedem ihrer Sätze anzugeben verlangt. Es hat daher schon Eukleides diesen letztern Satz mehr als Postulat denn als Lehrsatz hingestellt. Nun haben zwar in neuerer Zeit Manche es versucht, einen Beweis hierfür aufzufinden, auch dabei mehr oder weniger Glück gehabt, jedoch, so viel mir wenigstens bekannt ist, gibt das, was sie alles erfunden und ausgedacht haben, keineswegs nach meinem Dafürhalten die vollkommenste Befriedigung, läßt vielmehr noch vieles zu wünschen übrig. Denn wenn sie auch durch andere herbeigebrachte Sätze des Postulates Erweis ermöglichen, so sind viele dieser Sätze selbst, außerdem daß sie der Einfachheit entbehren, oft der Art, daß in ihnen wieder andere Forderungen aufgestellt werden, welche doch eines Beweises verdienen. Andere helfen sich durch Erklärungen von den Parallellinien selbst, deren Richtigkeit zwar leicht einzusehen ist, von welchem es aber dennoch wünschenswerth wäre, strenge Beweise zu geben. Ja selbst bei dem ersten Satze, daß zwei Linien sich niemals schneiden, wenn die durch eine durchschneidende dritte Linie gebildeten innern Winkel zusammen 2 R betragen, bleiben noch manche Fragen offen, welche keineswegs genügend beantwortet werden, nemlich: haben denn, wenn zwei Linien sich nicht schneiden, dieselben deßhalb auch immer gleichen Abstand von einander? ist sich nicht schneiden und gleichen Abstand haben, denn dieses heißt doch nur parallel sein, einerlei, oder gibt es auch Linien, die sich nicht schneiden und doch ihren Abstand verändern? Ferner wenn unter den bei einer durchschneidenden dritten Linie angegebenen Bedingungen zwei Linien sich nicht schneiden, finden diese Bedingungen nur gerade an diesem Orte statt oder vielleicht auch an manchen andern, oder an allen beliebigen Punkten der beiden Linien, der einen sowohl wie der andern? und wie ist der Beweis dafür beizubringen, warum eine senkrechte auf der einen Linie auch senkrecht auf der andern steht?

Hosted by Google

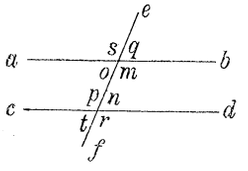
Diese Unsicherheit in der Lehre von den Parallellinien ist daher auch wohl die Ursache gewesen, weßhalb die Reihenordnung, in welcher die geometrischen Sätze folgen, nicht bei Allen dieselbe geblieben ist. Während man nemlich die Congruenz der Dreiecke und Vieles von den Eigenschaften derselben und dergleichen, zu deren Erweis die Kenntniß von den Parallellinien nicht erfordert wird, gewöhnlich vorhergehen läßt, so stellen Andere die Lehre von den Parallellinien fast an die Spitze voran und gründen auf dieselbe selbst vieles bei der Dreieckenlehre.

Wir setzen in dem Folgenden die Kenntniß von der Congruenz der Dreiecke voraus, sowie daß der größeren Seite des Dreiecks der größere Winkel gegenüberstehe, daß der Außenwinkel größer sei als der gegenüberliegende innere, daß je zwei Winkel eines Dreiecks zusammen immer weniger als 2 R betragen, endlich daß die senkrechte auf eine Linie von einem Punkte außerhalb derselben die kürzeste Entfernung von dieser Linie sei, was alles sich, ohne Kenntniß von den Parallellinien zu haben, leicht darthun läßt. Darauf gründen wir unsere neuen selbst erfundenen Beweise für die Sätze von den Parallellinien und glauben zuversichtlich, hiermit alle bisher befundenen Schwierigkeiten auf das vollständigste und vollkommenste gelöset und beseitiget zu haben.

Bei der Lehre von den Parallellinien kann man auf zweifache Art verfahren. Erstens geht man von den Eigenschaften gewisser Winkel aus, schließt daraus das Parallelsein von Linien, kehrt dann den Fall um und macht aus dem gegebenen Parallelsein der Linien die Folgerungen für die Winkel, oder zweitens werden zuerst aus dem Parallelsein der Linien die Schlüsse für die Winkel gezogen, und dann umgekehrt aus den gegebenen Winkeln das Parallelsein der Linien bewiesen.

Erstere Methode der Lehre von den Parallellinien.

Lehrsatz 1. Wenn zwei Linien von einer dritten so geschnitten werden, daß die auf derselben Seite der schneidenden Linie liegenden entgegengesetzten innern Winkel zusammen 2 R betragen, so sind auch 1) a. die correspondirenden Winkel, b. die Wechselwinkel, sowohl die innern als äußern einander gleich; 2) werden jene Linien, so sehr man sie auch verlängern mag, sich nie schneiden, weder zur einen noch andern Seite hin. (Siehe Figur 1.)



(Figur 1.)

Beweis von 1): Wenn a b und c d von e f so so durchschnitten werden, daß $\angle m + \angle n = 2R$, so muß auch a) $\angle q = \angle n$, $m = r$, $s = p$, $o = t$, d. h. die correspondirenden Winkel einander gleich sein. Denn da $m + n = 2R$, auch $m + q = 2R$, so ist auch $q = n$, da ferner auch $n + r = 2R$, so ist auch $m = r$. Da

Hosted by Google

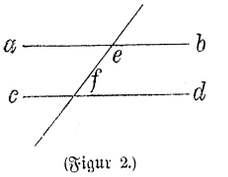
nun auch, weil m + n = 2 R, ebenfalls o + p = 2 R ſein muß und o + s = 2 R, ſo iſt auch s = p, und da p + t = 2 R, ſo iſt auch o = t.

b) α. Die innern Wechſelwinkel müſſen einander gleich ſein, m = p, und o = n; denn da m + o = 2 R = o + p, ſo auch m = p, und da p + n = 2 R = p + o, ſo iſt auch o = n.

β. Die äußern Wechſelwinkel müſſen einander gleich ſein, q = t und s = r. Denn es war q = n, auch iſt n = t, als Scheitelwinkel, folglich auch q = t, ebenſo da s = p und p = r, ſo auch s = r.

Beweis von 2): Die Linien a b und c d werden ſich niemals ſchneiden, ſo ſehr man ſie auch verlängern mag. Denn wenn ſie ſich z. B. nach b und d hin ſchnitten, ſo würde nach dieſer Richtung hin ein Dreieck entſtehen. Da nun aber zwei Winkel eines Dreiecks zuſammen weniger als 2 R ſind, ſo müßten auch ∠m + ∠n als Winkel dieſes Dreiecks weniger als 2 R betragen, was aber gegen die Vorausſetzung iſt, daß m + n = 2 R ſein ſoll. Mithin können auch die Linien a b und c d nach dieſer Seite hin ſich nicht ſchneiden. Derſelbe Fall findet aber auch ſtatt bei den Linien in der Richtung nach a und c hin, ſie können ſich auch hier nicht ſchneiden, weil ſonſt in einem Dreieck ∠o + ∠p gegen die Vorausſetzung kleiner als 2 R ſein müßten. (S. Fig. 2.)

Anderer Beweis, wozu die Kenntniß von der Dreieckenlehre nicht erfordert wird.



(Figur 2.)

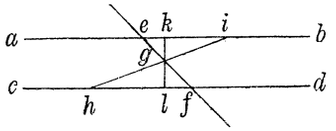
Man lege b e f d ſo auf c f e a, daß e f von b e f d auf f e von c f e a, Punkt e von b e f d auf Punkt f von c f e a, und Punkt f von b e f d auf Punkt e von c f e a zu liegen kommt. Da nun ∠b e f = ∠c f e und ∠e f d = ∠f e a, ſo fallen auch dieſe Winkel in einander, daher auch e b und f d der Richtung nach auf f c und e a. Würden ſich alſo die Linien a b und c d nach irgend einer Richtung hin einmal durchſchneiden, ſo müßten auch dieſelben ſich nach der andern Richtung hin durchſchneiden. Dieß iſt aber unmöglich, daß zwei Linien, die von einander verſchiedene Linien ſein ſollen, in zwei Punkten ſich ſchneiden. Folglich können auch a b und c d nach keiner Richtung hin ſich einmal durchſchneiden.

Zuſatz. Auch wenn die correſpondirenden oder Wechſelwinkel einander gleich ſind, betragen die innern 2 R, und die Linien ſchneiden ſich nicht. — Denn z. B. wenn q = n, ſo iſt, weil q + m = 2 R, auch m + n = 2 R, oder wenn o = n, ſo iſt, weil o + m = 2 R, auch m + n = 2 R. Daraus aber ergibt ſich alles Weitere.

Lehrſatz 2. Wenn zwei Linien a b und c d von einer dritten e f ſo geſchnitten werden, daß die zu einer Seite der durchſchneidenden liegenden innern Winkel zuſammen 2 R betragen, ſo hat auch jede durch die Mitte g der durch-

Hosted by Google

schneidenden ef gelegte Linie diese Eigenschaft, daß die innern Winkel derselben Richtung, welche sie mit den Linien ab und cd bildet, zusammen 2R ausmachen. (S. Fig. 3.)

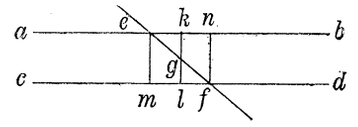


(Figur 3.)

Beweis. Man lege durch die Mitte von ef durch g in beliebiger Richtung die Linie hi bis zu den Linien ab und cd, sowie auch das Stück ef zwischen diesen Linien sein soll: dann wird $\triangle egi \cong \triangle fgh$, denn $eg = fg$, $\angle gei = \angle gfh$, und $\angle egi = \angle fgh$, daher auch $\angle eig = \angle fhg$, oder $\angle aih = \angle dhi$, aber $\angle aih + \angle bih = 2R$, also auch ist $\angle dhi + \angle bih = 2R$. Dreht man die Linie hi so lange, bis sie als gk senkrecht auf ab steht, oder fällt man von g auf ab die lothrechte gk, und von g auf cd die lothrechte gl, so ist $\triangle ekg \cong \triangle flg$, denn $eg = fg$, $\angle keg = \angle gfl$, und $\angle ekg = \angle flg = R$. Daher auch $ek = fl$, und $\angle egk = \angle fgl$. Diese letztern Winkel sind also Scheitelwinkel, weil eg und gf zusammen nur eine Linie ef ist, und also auch kg und gl zusammen nur eine Linie kl ausmachen müssen. Also ist kl eine Linie, die sowohl auf ab als cd senkrecht steht, und bezeichnet den Abstand beider Linien von je einem Punkte.

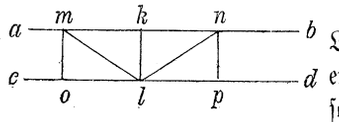
Zusatz. Auch wird jede solche Linie durch die Mitte g der ersten durchschneidenden ef in ihrer Länge zwischen ab und cd halbirt. Denn $\triangle egi \cong \triangle fgh$, da $eg = fg$, $\angle egi = fgh$, und $\angle gei = \angle gfh$, folglich auch $gi = gh$, ebenso $gk = lg$, wie schon gezeigt war.

Lehrsatz 3. Die Linien ab und cd, welche mit einer durchschneidenden ef solche innere Winkel bilden, von denen immer die zwei nach derselben Richtung liegenden zusammen 2R betragen, haben in gleicher Entfernung von der Abstandslinie kl stets gleiche Entfernung. (S. Fig. 4.)



(Figur 4.)

Beweis. Wenn man von e auf cd die senkrechte em, und von f auf ab die senkrechte fn fällt, so wird: $\triangle efm \cong \triangle fen$, denn $ef = fe$, $\angle efm = fen$, und $\angle emf = \angle fne = R$. Also auch $mf = ne$, und $em = fn$, aber es ist auch $lf = ke$, daher $mf - lf = ne - ke$, oder $ml = nk$. Die Linie em liegt mit ihren Punkten e und m so weit von der Abstandslinie kl, wie die mit em gleiche fn mit ihren Punkten f und n.



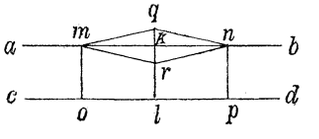
(Figur 5.)

Oder (s. Fig. 5.): Man mache auf der Linie ab von k der Abstandslinie kl aus nach entgegengesetzter Richtung $km = kn$, verbinde sowohl m als n mit l durch gerade Linien und

Hosted by Google

fälle auf cd sowohl aus m das Loth mo, als aus n das Loth np, so ist erstens △mkl ≅ △nkl, denn mk = nk, ∠mkl = ∠nkl = R, und kl = kl, daher ml = nl, ∠mlk = ∠nlk, folglich auch R — mlk = R — nlk, oder ∠mlo = ∠nlp. Da nun auch ∠mol = ∠npl = R, und ml = nl war, so ist △mol ≅ △npl, mithin mo = np, ol = pl. In gleicher Entfernung von der Abstandslinie kl sind die senkrechten aus m und n der Linie ab auf cd gefällt einander gleich.

Lehrsatz 4. Die Linien ab und cd, welche mit einer durchschneidenden ef solche vier innere Winkel bilden, daß je zwei derselben Richtung zusammen 2R betragen, haben überall gleichen Abstand, oder alle senkrechten von der einen zur andern Linie sind einander gleich, auch jede gleich der erstgefundenen Abstandslinie durch die Mitte der durchschneidenden, und steht wie diese auf beiden Linien ab und cd senkrecht. (S. Fig. 6.)



(Figur 6.)

Beweis. Es sei kl die Abstandslinie und km = kn, so ist also auch mo = np. Nun muß auch mo = kl und np = kl sein. Denn wäre mo größer als kl, und ql = mo, oder mo kleiner als kl, und rl = mo, so müßte die senkrechte mo, wenn sie auf cd immer senkrecht bleibend fortbewegt wird, mit ihrem Punkt m durch q oder r von m nach n gelangen, es könnte also der Punkt m keine gerade Linie durch diese Bewegung hervorbringen, welches aber immer der Fall ist. S. Methode II., Lehrs. 1. Der Beweis daselbst gilt auch hier und kann dort nachgelesen werden. Mithin muß q oder r auf mn fallen und mit k zusammentreffen. Es ist daher mo = kl = np. Da dieses also von allen Paaren von senkrechten wie mo und np gilt, und jegliche gleich kl sein muß, so sind auch alle senkrechten unter einander gleich, und jede gleich der Abstandslinie kl.

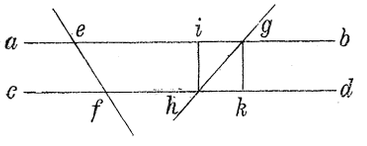
Zweitens steht jede auf einer Linie ab oder cd senkrechte auch auf der andern senkrecht. Denn Viereck molk auf klpn gelegt ergibt ∠omk = lkn = R, und ∠mkl = ∠knp = R.

Solche Linien, welche überall gleichen Abstand haben, nennt man parallele Linien. Es ist also ab ∥ cd.

Lehrsatz 5. Wenn zwei Linien so von einer dritten durchschnitten werden, daß die zu einer und derselben Seite der durchschneidenden Linie liegenden innern Winkel zusammen 2R betragen, und man zieht eine andere durchschneidende Linie in beliebiger Richtung, so werden auch bei dieser die zur selbigen Seite anliegenden innern Winkel zusammen 2R betragen. (S. Fig. 7.)

Wenn ∠bef + ∠efd = 2R = ∠aef + ∠efc, so auch ∠bgh + ∠ghd = 2R = ∠agh + ∠ghc.

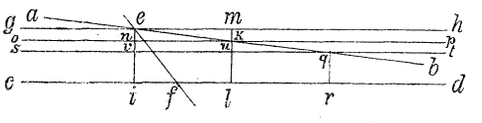
Hosted by Google



(Figur 7.)

Beweis. Man fälle von g auf cd die lothrechte gk, und von h auf ab die lothrechte hi, so ist gk=hi nach Lehrsatz 3 u. 4. Dann ist △gih≅△hkg, den gh = hg, hi=gk, und ∠gih = ∠hkg = R, mithin auch ∠igh=∠khg, oder ∠agh = ∠ghd. Nun ist ∠agh+∠bgh=2R, also auch ∠ghd+∠bgh=2R.

Lehrsatz 6. Wenn zwei Linien ab und cd von einer dritten ef durchschnitten werden, und die auf derselben Seite der durchschneidenden Linie liegenden innern Winkel (bef+efd, oder aef+efc) zusammen mehr oder weniger als 2R betragen, so müssen sich jene zwei ersten Linien ab und cd selber gehörig verlängert durchschneiden nach der Seite hin, wo die innern Winkel weniger als zwei rechte sind. (S. Fig. 8.)



(Figur 8.)

Beweis. Es betrage ∠bef+∠efd weniger als 2 R, so muß ∠aef +∠efc mehr als 2R ausmachen. Legt man nun durch e eine solche Linie gh, daß ∠hef +∠efd = 2R, also auch ∠gef+∠efc=2R, so wird der Theil eb der Linie ab unterhalb der Linie gh, und der Theil ae oberhalb derselben zu liegen kommen; eb bildet dann mit eh einen Winkel, dessen Schenkel sich immer weiter von einander entfernen. Da nun ∠hef+∠efd=2R, so sind die Linien gh und cd einander parallel, schneiden sich nicht und haben überall gleichen Abstand von einander. Aber der Abstand der Linie eb von cd nimmt immer ab und muß endlich gleich Null werden. Denn man fälle von e auf cd die senkrechte ei, nehme von der Linie eb einen beliebigen Abschnitt ek, fälle von k auf cd das Loth kl, so ist dasselbe, weil der Punkt k zwischen gh und cd liegt, auch kleiner als ei. Nemlich wenn man lk über k hinaus verlängert, bis diese verlängerte Linie die gh in einem Punkt m trifft, so wird ml=ei (Lehrsatz 3 u. 4), aber kl kleiner als ml, also auch kl kleiner als ei. Fällt man von k ein Loth kn auf ei, und verlängert dieses nach beiden Seiten hin unbestimmt nach o und p, so ist auch op parallel mit gh sowohl als mit cd; denn sowohl ∠kne+∠neh=2R, als ∠pni+∠nid=2R. Nimmt man nun auf ab von k aus ein weiteres Stück kq=ek, zieht von q auf cd die senkrechte qr, und auf kl von q die senkrechte qu, die man unbestimmt verlängert nach s und t hin, so ist st parallel mit cd und auch mit op und mit gh, auch ist qr=ul=vi. Dann ist △kuq≅△kme, denn ek=kq, ∠emk=∠quk, und ∠ekm=qku, folglich mk=uk, also auch mk=en=ku=nv, mu=2en. Mithin wenn en bedeutet $^1/_x$ von ei,

Hosted by Google

so hat, wenn kl um $^1/_x$ von ei abgenommen, qr ein $^2/_x$tel Theil von ei abgenommen; also entspricht dem Theil ek der Linie eb $^1/_x$ von ei und zwei Theile ek, d. i. eq einem $^2/_x$ von ei. Habe die Linie ei also x-Theile, so muß nach letztem Theil die mit cd gezogene Parallele, welche die Linie eb trifft, mit der Linie cd zusammenfallen; also muß alsdann die Linie eb auf der Linie cd anlangen, und zwar nach x-Theilen, deren jeder so groß ist als ek. Hat die Linie ei mehr als x-Theile und weniger als $x+1$, so muß die nach dem $x+1^{ten}$ Theile gezogene Parallele mit cd unterhalb cd fallen, deßhalb auch die Linie eb nach ihrem $x+1^{ten}$ Theile unterhalb cd sein, es muß eb die cd durchschnitten haben.

Anmerkung. Vorstehender Lehrsatz ist das Postulat des Eukleides, welches also hiermit vollständig erwiesen wird. (*αἴτημα*, Forderung 5, oder nach andern *ἀξίωμα*, Grundsatz 11.)

Zusatz 1. Allemal, wenn zwei Linien sich nicht schneiden, so haben sie auch gleichen Abstand von einander, sind also auch parallel.

Denn zwei Linien schneiden sich nur dann nicht, wenn die von einer durchschneidenden dritten Linie gebildeten zur selben Seite dieser liegenden innern Winkel zusammen 2 R betragen. Alsdann aber haben jene Linien auch überall gleichen Abstand von einander, sind einander parallel.

Zusatz 2. Durch einen Punkt außerhalb einer geraden Linie kann mit dieser nur eine Parallele gezogen werden.

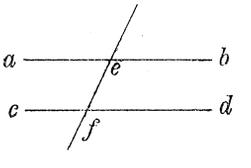
Denn jede andere durch diesen Punkt gezogene Linie würde mit der einzigen Parallelen einen Winkel bilden, folglich das eine Stück unterhalb, das andere oberhalb derselben liegen, und daher die gegebene Linie durchschneiden nach vorhergehendem Lehrsatze.

Zusatz 3. Wenn eine Linie eine andere durchschneidet, so muß sie auch jede andere Linie, welche mit dieser parallel läuft, durchschneiden.

Denn sonst würden mit einer Linie durch einen Punkt außerhalb derselben zwei Parallellinien gezogen werden können. Dieß aber widerspricht dem Vorigen.

Lehrsatz 7. Wenn zwei Linien einander parallel laufen, d. h. sich nicht schneiden und immer gleichen Abstand von einander behalten, so sind auch, wenn dieselben von einer dritten Linie durchschnitten werden, die zu einer und derselben Seite der durchschneidenden liegenden innern Winkel zusammen 2 R. (S. Fig. 9.) (gleich Fig. 2).

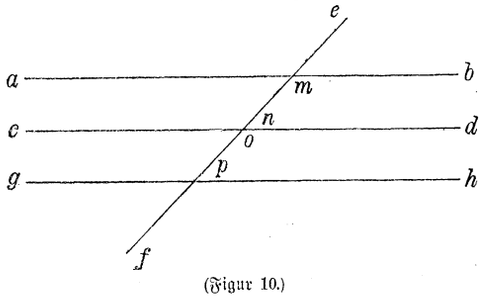
Beweis. Denn betrugen diese innern Winkel zusammen mehr oder weniger als 2 R, so müßten jene ersten zwei Linien einander durchschneiden nach vorhergehendem Lehrsatze (Lehrs. 6), könnten also nicht denselben Abstand von einander behalten, könnten nicht parallel unter einander sein.



(Figur 9.)

Hosted by Google

Zusatz. Wenn zwei Linien mit einer dritten parallel sind, so sind sie auch unter sich parallel. (S. Fig. 10.)



(Figur 10.)

Wenn ab ∥ cd, und ab ∥ gh, so auch cd ∥ gh, wenn cd ∥ ab, und cd ∥ gh, so auch ab ∥ gh, wenn gh ∥ ab, und gh ∥ cd, so auch ab ∥ cd.

Da immer eine Parallele mit den beiden andern parallel ist, so muß eine Linie ef, welche eine Paralle durchschneidet, auch die beiden andern durchschneiden nach vorigem Zusatz 3.

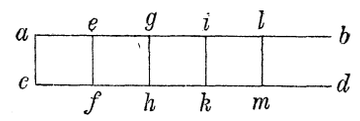
Ist nun erstens ab ∥ cd, und ab ∥ gh, so ist $m + n = 2R$, und $m + p = 2R$, daher $n = p$, und weil $n + o = 2R$, auch $o + p = 2R$, also cd ∥ gh.

Zweitens wenn cd ∥ ab, und cd ∥ gh, so ist $m + n = 2R = o + p$, aber $m = o$, $n = p$, also $m + p = 2R$, folglich ab ∥ gh.

Drittens wenn gh ∥ ab, und gh ∥ cd, so ist $m + p = 2R = o + p$, also $m = o$, und da $n + o = 2R$, auch $m + n = 2R$, folglich ab ∥ cd.

Andere Methode der Lehre von den Parallellinien.

Erklärung. Unter Parallellinien versteht man solche Linien, welche immer gleichen Abstand von einander haben, sich also nie schneiden. Daher der Name griechisch *παραλληλος* neben einander (seiend, gestellt, laufend). Solche Linien erhält man, wenn eine senkrechte auf einer gegebenen Linie immer senkrecht auf derselben fortbewegt wird. Denn dann beschreibt jeder beliebige Punkt der senkrechten eine Linie, welche mit der gegebenen immer gleichen Abstand behält. (S. Fig. 11.)



(Figur 11.)

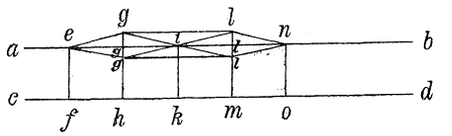
Wenn man ein rechtwinkeliges Dreieck aus Holz oder anderem beliebigen Stoff mit der einen Kathete dicht an das Lineal anlegt, an dem abstehenden Ende der andern Kathete einen Stift, wie Bleistift und dergleichen anbringt, welcher aber fest eingeheftet sein muß und nun das Dreieck längs dem Lineal fortbewegt, so beschreibt der Stift eine solche Linie, welche mit der Linie des Lineals oder diesem selbst überall gleichen Abstand hat.

$ac = ef = gh = ik = lm$.

Lehrsatz 1. Wenn eine senkrechte auf einer gegebenen geraden Linie fortbewegt wird, immer senkrecht auf derselben bleibend, so muß die Linie, welche

Hosted by Google

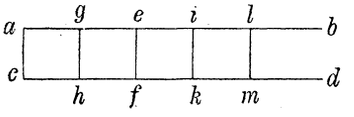
von einem beliebigen Punkte der senkrechten durch das Fortbewegen in gleichem Abstande beschrieben wird, eine gerade sein. (S. Fig. 12.)



(Figur 12.)

Beweis. Es seien in gleicher Entfernung auf cd die senkrechten ef, gh, ik, lm, no, durch die Fortbewegung von ef geworden, also auch ef = gh = ik = lm = no. Würde nun eg und gi nicht eine einzige gerade Linie ausmachen, so auch nicht il und ln. Dieß ergibt sich nemlich, wenn man Figur efkige auf ikonli nach der Buchstabenfolge legt, diese Figuren würden sich decken, und egi=iln, eg=il, gi=ln, sein. Aber es ist auch eg=gi=il=ln, denn efhg auf ghki gelegt macht eg=gi. Nun decken sich auch die Figuren efkige und ghmlig, deßhalb muß auch der abwärts nach cd gerichtete Winkel egi dem abwärts nach cd gerichteten ∠gil gleich sein. Es sei nun Punkt g unterhalb einer geraden ei, so auch l unterhalb der geraden in. Es muß daher i oberhalb gl liegen. Wenn nun ∠gil auf Seite gl des △gli nur ein hohler sein kann, so muß der aufwärts liegende ∠egi auf Seite ei eines △eig ebenfalls ein hohler, daher der abwärts gehende ∠egi nach cd zu ein erhabener Winkel sein. Nun müßte dieser erhabene abwärts gehende Winkel egi dem dem hohlen abwärts gehenden ∠gil gleich sein. Dieß ist unmöglich, und folglich kann in g keine Beugung sein unterhalb ei, und in l keine unterhalb in. Dasselbe ergibt sich, wenn g oberhalb einer geraden ei, und l oberhalb in läge. Denn dann müßte der abwärts liegende hohle Winkel egi dem abwärts gerichteten erhabenen ∠gil gleich sein, welches ebenfalls unmöglich. Folglich ist in allen Fällen egiln nur eine einzige gerade Linie.

Lehrsatz 2. Eine senkrechte auf der einen Parallele steht auch senkrecht auf der andern. (S. Fig. 13.)



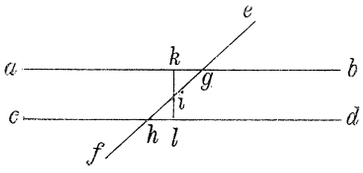
(Figur 13.)

Beweis. Denn da die senkrechten alle unter einander gleich sind nach der Erklärung, also ef=gh=ik, so nehme man, um z. B. von ef zu beweisen, welches senkrecht auf cd steht, daß es auch senkrecht auf ab stehe, zu beiden Seiten von f gleiche Abschnitte auf cd, nemlich fh=fk, und errichte auf cd in h und k die senkrechte gh und ik, diese müssen also gleich sein, und jede gleich ef. Legt man nun Viereck feik auf Viereck fegh, so fallen die Winkel fei und feg zusammen und decken sich, daher auch ∠fei=∠feg, und da diese Nebenwinkel, so ist jeder ein rechter, also ∠fei=∠feg=R. Aehnlich läßt sich dieß von gh und ik zeigen. Oder auch man lege Viereck feik auf Viereck hgef, so fällt ∠fei mit ∠hge, und ∠kie mit ∠feg zusammen. Da

Hosted by Google

also ∠fei = R, so auch ∠hge = R, und da ∠feg = R, so auch ∠kie = R. Jede solche senkrechte bezeichnet daher nicht bloß den Abstand eines Punktes von ab nach cd, sondern auch den Abstand von dem getroffenen Punkte auf cd nach ab.

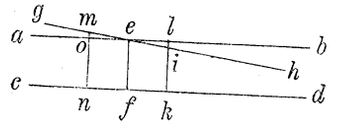
Lehrsatz 3. Wenn zwei Parallellinien von einer nicht parallelen Linie in noch so beliebiger Richtung durchschnitten werden, so betragen die innern Winkel, welche die durchschneidende auf ihrer selben Seite mit den beiden Parallelen bildet, immer je zusammen zwei rechte Winkel. (S. Fig. 14.)



(Figur 14.)

Beweis. Ist die durchschneidende die senkrechte auf einer Parallelen, so ist sie die Abstandslinie von beiden, von der einen zur andern, wie von dieser zu jener, und bildet mit jeder Parallelen zwei rechte Winkel nach dem Vorhergehenden, daher auch die Summe der Winkel je einer und derselben Seite zwei rechte. Nun seien aber ab und cd von gh in anderer beliebiger Richtung in den Punkten g und h durchschnitten. Man halbire gh in i, fälle aus i auf ab das Loth ik und verlängere dasselbe über i hinaus bis nach l auf cd, so steht kl auch auf cd senkrecht, und ∠kld = R = ∠lkb = ∠lka. Nun ist △gki ≅ hli, denn gi = hi, ∠gki = ∠hli = R, und ∠kig = ∠lih als Scheitelwinkel; folglich auch ∠igk = ∠ihl. Da nun ∠ihl + ∠ghc = 2R, so auch ∠igk + ∠ghc = 2R, oder ∠agh + ∠ghc = 2R = ∠bgh + ∠ghd.

Lehrsatz 4. Durch einen Punkt außerhalb einer Linie kann es nur eine Parallele mit dieser Linie geben. Alle andern durch diesen Punkt gezogenen Linien sind mit der gegebenen nicht parallel. (S. Fig. 15.)



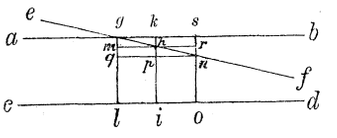
(Figur 15.)

Beweis. Man fälle aus dem Punkte e auf die gegebene Linie cd die senkrechte ef, beschreibe vermittelst dieser Linie nach der Erklärung aus e die Parallele mit cd, nemlich ab, so wird ab die einzige Parallele durch e mit cd sein. Denn jede andere durch e gezogene Linie gh bildet mit ab in e einen Winkel, daß ein Theil von ihr von e aus unterhalb ab, und der andere oberhalb ab kommt. Nun müssen die Abstände der Linie von der gegebenen cd auf der einen Seite von e aus immer abnehmen und auf der andern Seite zunehmen, können also niemals gleich sein, und daher kann auch die Linie gh nicht parallel mit cd sein. Es ist ik kleiner als lk und kleiner als ef, mn größer als on, größer als ef.

Lehrsatz 5. Eine Linie, welche die eine von zwei parallelen Linien schneidet, muß auch die andere schneiden. (S. Fig. 16.)

Hosted by Google

Wenn a b von einer Linie e f in g geschnitten wird, so muß auch die mit a b parallele c d von e f geschnitten werden.

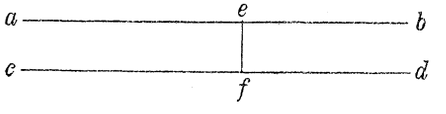


(Figur 16.)

Beweis. Man nehme von der durchschneidenden ein beliebiges Stück g h innerhalb der Parallelen vom Durchschnittspunkt g an, fälle aus h auf c d die senkrechte h i und verlängere diese über h, bis sie a b in k erreicht, so ist k i die immer gleiche Abstandslinie zwischen a b und c d, also auch gleich der senkrechten g l, auf c d von g gefällt. Beschreibt man nun mit der senkrechten h i auf c d durch h eine mit c d parallele, welche g l in m trifft, so ist h i = m l, und h k = m g. Der Abstand der Linie e f im Punkt h von c d ist also um k h oder g m kleiner, als der Abstand derselben Linie e f vom Punkte g aus nach c d. Beträgt g m etwa $^1/_x$ von g l, so hat auch der Abstand der Linie e f bei h um $^1/_x$ vom Abstand bei g abgenommen. Nimmt man nun auf g f von h aus ein weiteres Stück h n = g h und zieht mit der senkrechten n o auf c d die Parallele mit c d, welche k i in p und g l in q schneidet, so ist n o = p i = q l; verlängert man auch n o über n bis nach a b hin, so durchschneidet diese verlängerte die verlängerte m h in einem Punkt r und a b in s. Nun ist $\triangle$ h r n $\cong \triangle$ h m g, denn h n = g h, $\angle$ h r n = $\angle$ h m g = R, und $\angle$ r h n = $\angle$ m h g als Scheitelwinkel, also auch g m = r n, und da m l = r o, auch g m = s r, so ist s r = r n = $^1/_x$ und s n = $^2/_x$ von g l. Der Abstand der Linie e f in ihrem Punkte n nach c d hat also von g bis n um $^2/_x$ des Abstandes aus g abgenommen. Mithin auch nach x solcher Stücke wie g h muß der Abstand von g aus um $^x/_x$, das heißt um den ganzen Abstand g l abgenommen haben. Oder die Linie e f gelangt nach x solcher Theile wie g h ist, auf den Durchschnittspunkt mit c d. Hat der Abstand g l mehr als x solcher Theile wie g m, aber weniger als x + 1, so muß der Punkt nach dem x + 1ten Theil wie g m auf der verlängerten g l also unterhalb c d liegen, und die Parallele durch diesen Punkt mit c d unterhalb c d sein, also muß auch e f nach x + 1 solcher Theile wie g h ist, unterhalb der Linie c d gekommen sein, und folglich diese Linie durchschnitten haben.

Lehrsatz 6. Jede Linie, welche eine andere nicht schneidet, ist auch mit dieser parallel. (S. Fig. 17.)

a b soll c d nicht schneiden, so muß a b ∦ c d sein, d. h. beide Linien haben immer gleichen Abstand von einander.



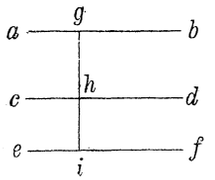
(Figur 17.)

Beweis. Man nehme einen beliebigen Punkt der einen Linie an, hier e auf a b, fälle von e auf c d die senkrechte e f, beschreibe mit diesem Abstand e f eine Parallele durch e mit c d. Würde nun die Parallele in anderer Richtung

Hosted by Google

als a b fallen, so schnitte sie a b und machte mit a b in e Winkel, und a b müßte, da es zum Theil oberhalb, zum Theil unterhalb der Parallele fiele, auch die andere Parallele c d einmal durchschneiden nach vorhergehendem Lehrsatz. Dieses ist aber gegen die Voraussetzung, daß a b die c d nicht schneiden soll. Also muß auch a b mit der Parallele durch e zusammenfallen, oder selbst mit c d parallel sein.

Lehrsatz 7. Zwei Linien, welche mit einer dritten parallel sind, sind auch unter sich parallel. (S. Fig. 18.)



(Figur 18.)

Beweis. Da immer eine Parallele mit zwei andern Linien parallel ist, so muß eine senkrechte auf einer dieser Linien auch auf den beiden andern senkrecht stehen.

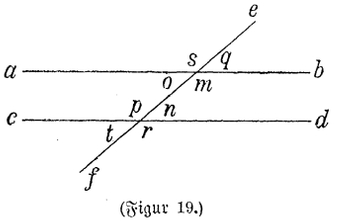
Wenn a b ∥ c d und a b ∥ e f, so c d ∥ e f,
wenn c d ∥ a b und c d ∥ e f, so a b ∥ e f,
wenn e f ∥ a b und e f ∥ c d, so a b ∥ c d.

1) Der Abstand c d von e f ist immer derselbe, nemlich g i − g h = h i.

2) Der Abstand a b von e f ist immer g h + h i = g i.

3) Der Abstand a b von c d ist immer g i − h i = g h.

Lehrsatz 8. Wenn zwei Linien von einer dritten so geschnitten werden, daß die zu einer und derselben Seite der durchschneidenden mit den beiden andern Linien gebildeten innern Winkel zusammen 2 R betragen, so sind auch 1) a. die correspondirenden Winkel, b. die Wechselwinkel, sowohl die innern als die äußern einander gleich; 2) werden die ersten beiden Linien sich nie schneiden und sind daher einander parallel. (S. Fig. 19.) (Gleich Fig. 1.)



(Figur 19.)

Beweis. Wenn ∠m + ∠n = 2 R, so ist

1) a. q = n, m = r, s = p, o = t, oder die correspondirenden Winkel sind einander gleich. Denn da m + n = 2 R, und q + m = 2 R, so q = n, da auch n + r = 2 R, so m = r, und da nun auch o + p = 2 R sein muß, weil m + n = 2 R, aber auch o + s = 2 R, so s = p, und da auch p + t = 2 R, so o = t.

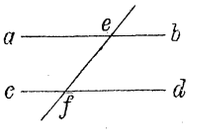
b) *α*. Die innern Wechselwinkel sind einander gleich, o = n und m = p. Denn m + n = 2 R, und o + m = 2 R, mithin o = n, und da auch o + p = 2 R, so m = p.

β. Die äußern Wechselwinkel sind einander gleich q = t und s = r; denn q = o als Scheitelwinkel und o = t, also q = t; ferner s = m und m = r; also s = r.

2) Die Linien a b und c d schneiden sich nicht und sind parallel. Denn

Hosted by Google

wenn sich die Linien nach irgend einer Seite hin schnitten, so würde ein Dreieck entstehen, in welchem die beiden innern Winkel zusammen 2 R ausmachten. Dieses ist aber unmöglich.

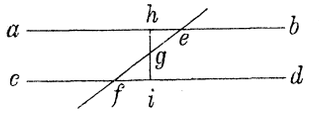


(Figur 20.)

Anderer Beweis. (S. Fig. 20) (gleich Fig. 2 u. Fig. 9.) Man lege b e f d auf c f e a, so decken sich die Winkel b e f und c f e, ebenso die Winkel e f d und f e a, a b fällt genau auf c d, und c d auf a b, jedes nur in umgekehrter Richtung. Würden sich also diese Linien nach einer Seite hin schneiden, so müßten sie dasselbige auch nach der andern Seite hin, welches unmöglich, indem zwei Linien sich nicht in zwei Punkten durchschneiden können.

Wenn also nun die Linien a b und c d sich nicht durchschneiden, so sind sie auch einander parallel nach einem vorhergehenden Lehrsatze (Lehrs. 6). Dieses ergibt sich aber auch auf folgende Weise (s. Fig. 21):

Man halbire e f zwischen a b und c d in g, ziehe von g auf a b das Loth g h, und von g auf c d das Loth g i. Nun ist $\triangle e g h \cong \triangle f g i$, denn $e g = f g$, $\angle e h g = \angle f i g = R$, und $\angle h e g = \angle i f g$, daher auch $\angle h g e = \angle i g f$.

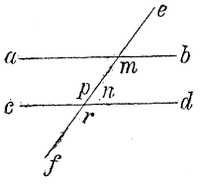


(Figur 21.)

Da nun e g und g f nur eine gerade Linie e f ist, so müssen auch h g und g i nur eine Linie h i ausmachen, die Winkel h g e und i g f Scheitelwinkel sein. Folglich ist h i Abstandslinie von a b nach c d und von c d nach a b. Beschreibt man mit diesem Abstand von c d eine Parallele mit c d, so muß dieselbe mit a b zusammenfallen, also auch a b ∥ c d sein

Zusatz. Umgekehrt wenn die correspondirenden Winkel gleich sind, oder die Wechselwinkel, so betragen die innern Winkel zur selbigen Seite der durchschneidenden 2 R, und die durchschnittenen Linien sind parallel. (S. Fig. 22.)

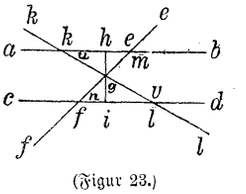
Wenn $m = r$, so auch $m + n = 2R$, denn $n + r = 2R$ und $m = r$, also $m + n = 2R$. Ferner wenn $m = p$, so $m + n = 2R$, denn $n + p = 2R$, und $m = p$, also $m + n = 2R$. Da nun $m + n = 2R$, so müssen a b und c d einander parallell sein nach dem Lehrsatze.



(Figur 22.)

Lehrsatz 9. Wenn eine Linie zwei andere Linien durchschneidet und die mit diesen gebildeten innern Winkel derselben Richtung zusammen je 2 R betragen, so findet dasselbe auch bei jeder Linie statt, welche durch die Mitte der durchschneidenden gezogen wird. Wenn $m + n = 2R$, so auch $u + v = 2R$. (S. Fig. 23.)

Beweis. Es ist $\triangle e g k \cong \triangle f g l$ denn $e g = g f$, $\angle k e g = \angle l f g$, und $\angle e g k = \angle f g l$, Daher



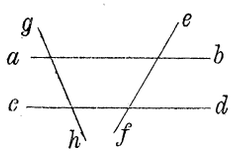
(Figur 23.)

Hosted by Google

$\angle$ e k g $=\angle$ f l g, da nun $\angle$ v + $\angle$ f l g $= 2$ R, so auch $\angle$ v + $\angle$ e k g $= \angle$ v + $\angle$ u $= 2$ R.

Zusatz. Der Punkt g halbirt alle durch ihn gelegten Linien bis zu den Parallelen, e g $=$ g f, h g $=$ g i, k g $=$ g l.

Lehrsatz 10. Wenn eine Linie zwei Linien durchschneidet und die zur selben Seite der durchschneidenden gebildeten innern Winkel zusammen 2 R betragen, so findet dasselbe auch bei jeder andern Linie statt, welche in beliebiger Richtung jene zwei Linien durchschneidet. (S. Fig. 24.)



(Figur 24.)

Beweis. Wenn durch e f solche Winkel gebildet werden, so mußte a b mit c d parallel sein nach Lehrsatz 8; alsdann aber betragen nach einem frühern Satze (Lehrsatz 3) die innern Winkel bei jeder in beliebiger Richtung durchschneidenden Linie auf ihrer selben Seite zusammen 2 R.

Hosted by Google

II.

Der ſtereometriſche Satz des Archimedes

über Umfang und Inhalt einer Kugel,

nach ſeinem richtigen und vollſtändigen Beweiſe.

Aus dem Jahre 1863.

Von neuem durchgeſehen und vervollſtändigt 1869.

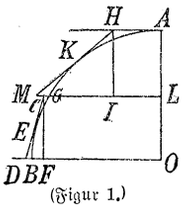
Hosted by Google

Hosted by Google

Betrachtung des Archimedeischen Satzes über den Inhalt der Oberfläche einer Kugel, deren körperlichen Inhalt, und ihr Verhältniß zum Cylinder und zum Kegel.

Die Richtigkeit des Archimedeischen Satzes über den Inhalt der Oberfläche einer Kugel sucht man hauptsächlich dadurch zu begründen, daß die um die Oberfläche der Kugel beschriebenen Kegelzonen gleich den entsprechenden Cylinderzonen (des Cylinders, dessen Höhe der Durchmesser der Kugel, und dessen Grundfläche ein größter Kreis der Kugel ist), auch bei gehöriger Kleinheit der Seitenlinien als gleich den Kugelzonen angenommen werden können. Nun ist klar, daß diese Kegelzonen in Beziehung zu einander betreffs der Seitenlinie und der Höhe von dreifacher Beschaffenheit sein können; erstens sind die Höhen der verschiedenen Kegelzonen gleich, oder zweitens die Seitenlinien gleich, oder drittens sowohl Seitenlinien als Höhen sind verschieden. Eine vierte Art, wo sowohl Seitenlinien als Höhen einander gleich sind, findet sich nicht bei den Kegelzonen derselben Halbkugel, wohl aber hat jede eine entsprechende der andern Halbkugel mit gleicher Seitenlinie und gleicher Höhe. Wir betrachten hier ausschließlich die Kegelzonen an derselben Halbkugel.

Bei den Kegelzonen erster Art oder denen gleicher Höhe bedarf es wohl keines weiteren Beweises, daß diese stets verschiedene Seitenlinien haben müssen. Da nemlich auf einer Kugel die Meridiane vom Aequator aus zu dem Pol zuerst sich fast ganz senkrecht erheben, dann immer weniger, bis sie endlich platter und platter gehend nahe am Pol fast in paralleler Richtung mit dem Aequator kommen, so steht die zunehmende Höhe vom Aequator aus zu dem Pol nie in einem Verhältniß zu dem zunehmenden Bogen des Kreises. Wenn daher bei 30^0 schon die halbe Höhe des Halbmessers erreicht ist, so ist der zurückgelegte Bogen erst $1/3$ des zu beschreibenden Quadranten. (S. Figur 1.)



(Figur 1.)

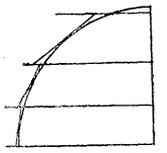
Es sei Bogen $BG = 30^0$ und $GA = 60^0$, also $LO = AL$, dann sei die Tangente CD zwischen ML und DO an den Bogen BEG gezogen, ebenso an den Bogen GKA zwischen MA und ML die Tangente HM.

Hosted by Google

Durch die gefällten senkrechten HJ und CF (zwischen je zwei zunächst liegenden Parallelen) entstehen die beiden Dreiecke △HMJ und △CDF, die so beschaffen sind, daß Seite HJ = CF, und ∠HJM = CFD als rechte, aber ∠MHJ ist größer als ∠DCF, weil ja die Tangente HM eine schiefere Lage zu dem Halbmesser hat als CD, mithin ist auch Seite HM > CD. Wie von diesen Seitenlinien der beiden Kegelzonen, so läßt sich also von jeden zwei Zonen an der Halbkugel zeigen, daß wenn die Zonen gleiche Höhe haben, sie verschiedene große Seitenlinien haben müssen.

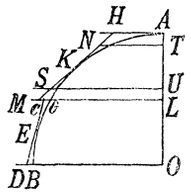
Zweitens die Kegelzonen gleicher Seitenlinien um dieselbe Halbkugel haben ungleiche Höhen. Denn hätten solche Zonen eine gleiche Höhe, so müßten zugleich auch nach dem Früheren die Seitenlinien verschiedener Größe sein, welches ein Widerspruch.

Bei den Kegelzonen dritter Art von verschiedenen Seitenlinien und verschiedenen Höhen kann ein zweifacher Fall statthaben. Entweder sind sowohl Seitenlinien als Höhe der einen Zone größer als die der andern, oder wenn eins von beiden, Seitenlinie oder Höhe der einen Zone größer ist als die der andern, so ist die Höhe oder Seitenlinie der erstern kleiner als die der letztern.



(Figur 2.)

Zonen des ersten Falles erhält man durch solche Trapeze, in welchen man die oberste dreier nach einander folgenden Parallelen weiter von der mittlern abstehen läßt, als diese von der untersten, und dann zwischen die Parallelen Tangenten an den Kreis legt. (S. Fig. 2.) Zonen des zweiten Falles erhält man (S. Fig. 3), wenn man z. B., nachdem man die Parallelen ML, HA, BO gezogen, so daß LO = LA, an Bogen BG die Tangente DC legt mit dem Berührungspunkt E, und an Bogen GKA eine Tangente MH mit dem Berührungspunkt K. Nun ist MH > DC. Nimmt man dann von MH ein Stück, aber noch größer als DC, sei's von M aus MN, oder von H aus HS, oder auch von K aus nach beiden Seiten hin SN, und zieht die Parallelen SU, NT mit dem Halbmesser BO, so erhält man Trapez MNTL oder SHAU, in welchem die Seitenlinie MN oder SH größer als DC, aber Höhe TL oder AU kleiner als LO ist.

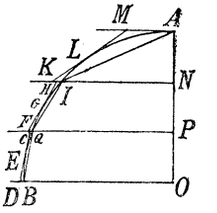


(Figur 3.)

Eine Kegelzone für sich betrachtet, berührt entweder in der Mitte ihrer Seitenlinie das zustehende Kugelstück oder nicht in der Mitte, und also auch das sie bildende Trapez hat zu seiner Seitenlinie eine Tangente, welche eine Doppeltangente ist, die entweder aus zwei kleinen gleichen Tangenten besteht, oder aus zwei ungleichen. Wir richten zuvörderst unsere Aufmerksamkeit nur auf solche

Hosted by Google

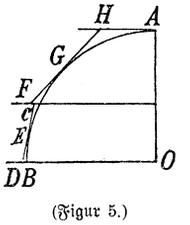
Kegelzonen, deren Seitenlinien in ihrer Mitte das Kugelstück berühren, und auf solche Trapeze, deren Seitenlinie eine Doppeltangente, aus zwei gleichen kleinern Tangenten ist.



(Figur 4.)

Wenn die Kegelzonen derselben Halbkugel eine gleiche Höhe haben, wie in der vorliegenden Figur (Fig. 4), so sind also deren Seitenlinien verschieden, und zwar wird das Trapez der ersten Zone, die zunächst dem Aequator liegt, die kleinste Seitenlinie, jedes darauf folgendes immer eine größere Seitenlinie haben, $DC \angle FH$; $FH \angle KM$. Ebenfalls zu der größeren Seitenlinie gehört auch der größere Kreisbogen, weil z. B. die Sehne des zweiten Bogens zwischen gleich weit abstehenden Parallelen schiefer zu liegen kommt, als die des ersten Bogens, Sehne JQ schiefer als Sehne QB, und daher $JQ \nearrow QB$, folglich auch Bogen JGQ größer als Bogen QEB.

Es können aber die Endpunkte der verschiedenen Tangenten, welche die Seitenlinien der Trapeze und der Kegelzonen bilden, niemals zusammenkommen, so F nicht mit C, und K nicht mit H. Denn kämen K und H in einem Punkte z. B. H zusammen, so könnte von H aus an den Bogen JL nur eine Tangente gezogen werden gleich HG, also müßte dann auch die ganze Tangente, da der Berührungspunkt die Mitte derselben sein soll, Tangente KM gleich Tangente HF werden, welches ja nicht möglich. Ebenderselbe Widerspruch, wenn K und H in dem Punkte K sich treffen sollten. Solche Seitenlinien der Kegelzonen oder der Trapeze machen daher nie Seiten eines unregelmäßigen Polygons aus.



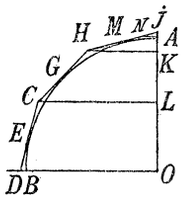
(Figur 5.)

Dasselbe gilt daher sogleich auch bei den Kegelzonen der dritten Art von verschiedenen Höhen. (S. Fig. 5.) Es kann F nicht mit C zusammentreffen, weil von C aus an den Kreis nur noch eine Tangente gleich CE gelegt werden kann, und also dann $FH = CD$ würde gegen die Voraussetzung. Ebenso kann C nicht in F kommen, weil CD gleich FH werden würde.

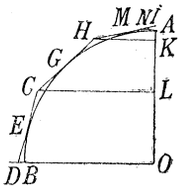
Da also bei den Kegelzonen der ersten und der dritten Art, welche verschiedene Seitenlinien haben, nicht allein die Tangenten mit den gehörenden Kreisbogen übereinstimmend, sondern auch dieselben bei der gebührlichen Kleinheit mit einander zusammenstoßend angenommen werden müßten, durch welche weitere Annahme aber der Beweis des Archimedeischen Satzes nur erschwert und unwahrscheinlich gemacht werden würde, so nehmen wir füglich Abstand von der weiteren Betrachtung solcher Kegelzonen und kehren zu denen der zweiten Gattung, welche bei gleichen Seitenlinien eine ungleiche Höhe haben.

Hosted by Google

Wenn man um einen Kreis irgend ein regelmäßiges Polygon von beliebiger Seitenanzahl beschreibt, so können leicht, nachdem man aus einer Ecke des Polygons nach dem Mittelpunkt den großen Halbmesser gezogen, durch parallele Linien mit diesem Halbmesser aus den anderen Ecken bis zu dem auf demselben senkrecht stehenden Halbmesser des Kreises diejenigen Trapeze erhalten werden, welche zur Bildung der Kegelzonen um die Halbkugel erfordert werden. Wenn hierbei mit dem Ende des Quadranten auch eine Seite des Polygons abschließt, so fassen den Quadranten nicht bloße Trapeze gleicher Seitenlinien in sich ein, so z. B. beim Zwölfeck (S. Fig. 6), wo drei Seiten DC, CH, HJ als Tangenten zu einem Quadranten gehören und man außer den beiden Trapezen CDOL und HCLK das △JHK erhält, welches selbst wieder sich in ein Trapez AKHN aber mit ungleicher Seitenlinie und in ein Dreieck JNA zerlegen läßt. Ebenso aber auch, wenn mit dem Ende des Quadranten ein Theil der Seite abschließt, welcher mehr oder weniger als die halbe Seite ausmacht, umfassen den Quadranten nicht lauter Trapeze, so z. B. beim Elfeck (S. Fig. 7), wo nach zwei Trapezen ein Dreieck HKJ übrig bleibt, welches sich wieder in ein Trapez HNAK mit ungleicher Seitenlinie und in ein Dreieck ANJ zerlegen läßt. Nur wenn das Ende des Quadranten genau mit der halben Polygonseite abschließt, lassen sich um den Quadranten lauter Trapeze mit gleichen Seitenlinien legen.

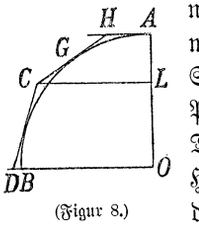


(Figur 6.)



(Figur 7.)

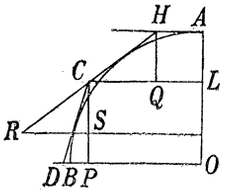
Es muß also immer die Seitenzahl des Polygons, aus dessen vierten Theil man lauter Trapeze bildet, zwar eine gerade Zahl sein, durch zwei genau theilbar, aber nicht durch vier. So z. B. erhält man vom Zehneck genau zwei Trapeze, DOLC und CLAH bei einem Quadranten. (S. Fig. 8.) Weil nemlich an A eine Tangente zu liegen kommt, welche parallel mit dem großen Halbmesser DO ist, auch zugleich die halbe Seite des Polygons ausmacht, so wird jeder vierte Theil des Polygons genau in Trapeze gleicher Seitenlinie abgetheilt. — Daß nun solche Trapeze von gleichen Seitenlinien ungleiche Höhen haben müssen, ist erwähnt, und es kann dieses auch direkt bewiesen werden. Denn wenn man HC über C hinaus verlängert bis R, daß CR = HC wird, durch R eine Parallele zieht mit DO, so ist △RCS ≅ △HCQ, also CS = HQ. (S. Fig. 9.) Da nun aber die Linie CR die verlängerte DO weder schneiden noch erreichen kann, weil eine Linie bis auf die verlängerte DO größer sein würde als CD, also auch größer als HC, so muß also nothwendig Punkt S zwischen C und P liegen. Mithin



(Figur 8.)

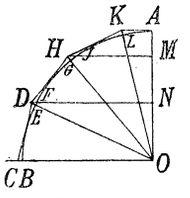
Hosted by Google

C S ∠ C P, oder H Q ∠ C P. Da dieser Beweis allgemein von den Höhen zweier solchen nach einander folgenden Trapezen und Quadranten gilt, so nehmen also die Höhen vom horizontalen Halbmesser aus gerechnet regelmäßig ab, das erste unterste Trapez hat die größte Höhe, das nächstfolgende die zweitgrößte und so fort, bis das letzte oberste Trapez die kleinste Höhe bekommt, die Anzahl der Trapeze mag so groß sein als sie will.



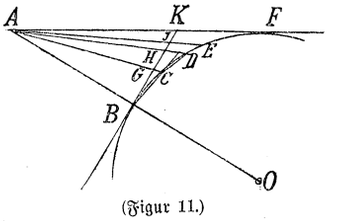
(Figur 9.)

Was nun die einzelnen Bogen betrifft, zu denen die unter einander gleichen Seitenlinien als Tangenten gehören, so werden dieselben sich als unter einander ungleich erweisen lassen und zwar so, daß jeder folgende Bogen um ein kleines Etwas größer ist als der zunächst vorhergehende. Nemlich (S. Fig. 10) durch die gezogenen großen Halbmesser des Polygons und die Parallelen, welche die einzelnen verschiedenen Trapeze von einander trennen, werden solche Winkel gebildet, die nach Verhältniß regelmäßig zunehmen, ∠ O D N, ∠ O H M, ∠ O K A. Denn ∠ O D N = D O C = $^4/_n$R des Polygons; ∠ O H M = ∠ H O C = 2. $^4/_n$R, und O K A = K O C = = 3 . $^4/_n$ R. Mögen nun der Winkel noch so viele sein, oder mag die Anzahl der Seitenlinien noch so groß sein, so werden sich solche Winkel der Reihenfolge nach zu einander verhalten wie 1 : 2 : 3 : 4 : 5 : 6 u. s. w. Bezeichnet man die Bogen, welche convex diesen Winkeln gegenüberstehen E F, G J, L A, der Reihe nach mit a, b, c, so ist Bogen B F = B. B E + B. E F = $^4/_n$Q + a; B. F J = E G − E F + G J = $^4/_n$Q − a + b; B. J A = G L − G J + L A = $^4/_n$Q − b + c. So würden, wenn der Bogen mehrere wären, die folgenden sein $^4/_n$Q − c + d; $^4/_n$ Q − d + e u. s. w. Stünden nun die Bogen a, b, c, d, e zu einander in demselben Verhältniß wie die Winkel, denen sie convex zuliegen, d. h. wäre b = 2 a, c = 3 a, d = 4 a u. s. w., so müßten die Bogen, welche bei gehöriger Kleinheit mit den Seitenlinien der Trapeze übereinkommend angenommen werden sollen, auch selbst unter einander gleich sein, indem jeder $^4/_n$Q + a würde. Nun aber läßt sich zeigen, daß b ⩾ 2 a, c ⩾ 3 a, d ⩾ 4 a u. s. w. ist.



(Figur 10.)

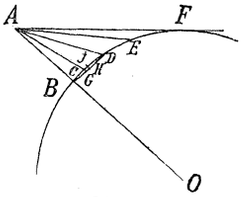
Wenn man (S. Fig. 11) von einem außerhalb eines Kreises gelegenen Punkt A nach dem Mittelpunkt dieses Kreises O eine gerade Linie zieht A O, welche den Kreis in einem Punkt B schneidet, so wird die Linie A B die kürzeste Linie sein, welche von A aus bis zu einem Punkte der Kreislinie gezogen werden kann, jede andere von A aus gezogene Linie ist um so größer, je weiter von A B



(Figur 11.)

Hosted by Google

entfernt, und die von A aus an den Kreis gelegte Tangente A F ist die längste. Denn legte man an Punkt B eine Tangente des Kreises, so durchschneidet diese Tangente alle von A aus an den Kreis gezogenen Linien in G, H, J, K. Nun ist $AB \angle AG$, also auch $AB \angle AC$, und da $AB \angle AH$, auch $AB \angle AD$, und so fort. Dasselbe Verhältniß würde auch für alle Linien an den Kreis auf der andern Seite von A B statthaben. Sodann ist auch $AC \angle AD$, $AD \angle AE$ u. s. w. Denn verbände man B mit C, so ist $\angle ABC$ ein stumpfer Winkel, und da $\angle ABC$ kleiner sein würde, als ein Winkel gebildet aus A C und der verlängerte B C, dieser Winkel aber kleiner als $\angle ACD$, so muß um so mehr $\angle ACD$ ein stumpfer Winkel sein, also $AD \nearrow AC$. Ebenso läßt sich zeigen, daß $AE \nearrow AD$, $AF \nearrow AE$ ist. Nun ist aber die Tangente A F die längste Linie, welche von A aus an den Kreis gezogen werden kann. Denn da die Tangente den Kreis nur in einem einzigen Punkte berührt, so müßte eine auf der andern Seite der Tangente gezogene gerade Linie, um an den Kreis zu gelangen, die Tangente noch einmal durchschneiden, also mit der Tangente zwei Punkte gemein haben, ohne mit ihr in allen andern Punkten zusammenzufallen, welches unmöglich.



(Figur 12.)

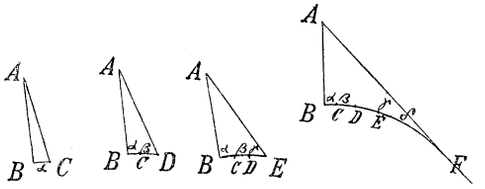
Wenn nun (S. Fig. 12) $\angle BAC = \angle CAD = \angle DAE$ u. s. w. ist, so hat man, wenn man B mit D verbindet, und A C verlängert, bis diese verlängerte die Seite B D in einem Punkte G trifft, die Proportion $AB : AD = BG : GD$. Da $AB \angle AD$, so auch $BG \angle GD$. Nähme man von B D die Mitte H, errichtete in H auf B D die senkrechte H J bis an den Kreis, so kann diese senkrechte Linie G C nicht treffen, weil $\angle CGH$ ein stumpfer Winkel ist, und Punkt J muß also zwischen C und D fallen. Da nun auch durch diese senkrechte H J der Bogen B D in zwei gleiche Theile getheilt wird, so muß Bogen B C kleiner als Bogen C D sein. Ebenso läßt sich zeigen, daß Bogen C D kleiner als Bogen D E, $\mathfrak{B}.DE \angle \mathfrak{B}.EF$ u. s. w. ist. Daher ist auch $\mathfrak{B}.BD$ größer als zweimal $\mathfrak{B}.BC$, oder $b \nearrow 2a$, $\mathfrak{B}.BE$ größer als dreimal $\mathfrak{B}.BC$, oder $c \nearrow 3a$, und da $\mathfrak{B}.BE = \mathfrak{B}.BD + \mathfrak{B}.DE$, aber $\mathfrak{B}.BC \angle \mathfrak{B}.DE$ ist, auch $\mathfrak{B}.BE \nearrow \mathfrak{B}.BD + \mathfrak{B}.BC$, oder $c \nearrow b + a$, ebenso $d \nearrow 4a$, $d \nearrow c + a$, $d \nearrow c + \frac{1}{2} b$, u. s. w.

Da der erste Bogen, der seiner entsprechenden Seitenlinie des Trapezes zuliegt, gleich $^4/_n Q + a$, der zweite Bogen gleich $^4/_n Q - a + b$, der dritte $^4/_n Q - b + c$, der vierte $^4/_n Q - c + d$ ist, so würde also zum Beweise, daß diese Bogen regelmäßig zunehmen, nur zu zeigen sein, daß $b - a \nearrow a$, $c - b \nearrow b - a$, $d - c \nearrow c - b$ u. s. w. ist.

Bezeichnet man (S. Fig. 13 a b c d) die Kreisbogen B C, C D, D E, E F

Hosted by Google

welche gleichen Winkeln convex gegenüberstehen, deren Spitze derselbe Punkt A ist, mit α, β, γ, δ, so ist also $a = \alpha$, $b = \alpha + \beta$, $c = \alpha + \beta + \gamma$, $d = \alpha + \beta + \gamma + \delta$, Dadurch wird $b - a = \beta$, $c - b = \gamma$, $d - c = \delta$. Mithin da $\beta \nearrow \alpha$, ist



(Fig. 13a.) (Fig. 13b.) (Fig. 13c.) (Fig. 13d.)

auch $b - a \nearrow a$, und da $\gamma \nearrow \beta$, auch $c - b \nearrow b - a$, endlich da $\delta \nearrow \gamma$, auch $d - c \nearrow c - b$. Die Bogen zu den Seitenlinien nehmen daher regelmäßig zu, je weiter sie sich zur Höhe erheben.

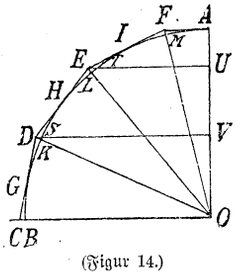
Wenn man nun aus den Seiten eines um den Kreis beschriebenen regelmäßigen Polygons sich die Seitenlinien der Trapeze entstanden vorstellt, so würden die dazu gehörenden Bogen des Kreises, obgleich ungleich, dennoch wenig von einander verschieden sein können. Da es nemlich um den Quadranten $^1/_4$ n Seiten gibt, aber $(^1/_4 n - ^1/_2)$ Seiten oder $\frac{n-2}{4}$ Seiten zu $\frac{n-2}{4}$ Bogen kommen, indem die letzte halbe Seite bei dem Umkreisen der Trapeze um ihre Achsen die freie obere Bedachung des letzten Trapezes bildet, welche nicht mehr zur Seitenfläche der Trapeze gehört, so würde bei einer sehr großen Seitenanzahl die letzte halbe Seite sehr klein sein müssen, und um die einzelnen Theile des zu dieser sehr kleinen halben Seite gehörenden Kreisbogens würden verhältnißmäßig die übrigen Bogen, jeder über $^4/_n$ Q vermehrt werden müssen, so daß der erste Bogen $^4/_n$ Q + α, der zweite $^4/_n$ Q + β, und so fort beträgt, aber α, β, γ, δ ꝛc. sind die einzelnen Theile des Kreisbogens, welcher zur letzten halben Seite eines solchen Polygons zusteht. Da nun bei großer Seitenanzahl dieser Kreisbogen äußerst klein sein muß, so noch mehr ein Theil derselben α oder β oder γ. Deßhalb kann selbst der Unterschied des letzten dieser Theile und des ersten nur äußerst Geringes geben, oder letztes größtes Kreistheilchen ist nur äußerst wenig verschieden vom ersten. Jeder Seitenlinie steht daher immer ein fast gleicher Kreisbogen entgegen. Man sollte nun denken, es könnten bei gehöriger Kleinheit die Seiten den Bogen gleich geachtet werden, und so müßte dann der Umfang, welchen die kreisenden Trapeze bilden, als gleich gelten dem Umfang der Halbkugel. Da dann der Umfang des ersten Kegelstückes 2π r h, des zweiten 2π r h' und so fort ist, mithin die Seitenflächen der gesammten 2π. r (h + h' + h'' ꝛc.) $= 2\pi$. r. r $= 2\pi r^2$, so wäre nun die umgebende Fläche der Halbkugel $2\pi . r^2$, und daher die Oberfläche der Kugel $4\pi . r^2$. Was könnte man gegen solches Beweisverfahren, dessen man durchgängig sich bedient noch einwenden?

Wenn man in einer Wissenschaft, welche es auch immer sein mag, eine Annahme macht, welche nicht auf einen strengsten Beweis, sondern nur auf ein

Hosted by Google

allgemeines Dafürhalten und Beurtheilen nach menschlicher Ansicht gestützt ist, so mag dieß immerhin angehen und auch seine Richtigkeit haben, so lange man nicht berechtigt ist, aus solcher Annahme zugleich auch Folgerungen machen zu können, welche offenbar auf etwas Falsches führen. Kommt man aber durch diese Annahme zugleich auch auf Schlüsse, welche ein anerkannt Unwahres aussagen, so darf sie mit Recht wohl in keiner Wissenschaft, in der Mathematik aber ein für allemal schlechterdings nie und nimmehrmehr gemacht werden. Nun aber wird hier bei solcher Beweisführung eine Annahme gemacht, woraus, wenn wir sie als richtig voraussetzen, wir solches folgern und erschließen können, was nicht nur mit frühern anerkannt richtigen Sätzen, sondern selbst mit den ersten Grundsätzen der Mathematik im entschiedensten Widerspruche steht. Man lese und staune!

Weil die Seite eines umschriebenen regelmäßigen Polygons größer ist als der anliegende Kreisbogen, so möchte es auf den ersten Blick scheinen, daß dadurch, indem zu den Seitenlinien des Trapezes nicht ein Bogen $^4/_n\,Q$, sondern $^4/_n\,Q + \alpha$, $^4/_n\,Q + \beta$, $^4/_n\,Q + \gamma$, u. s. w. gegenübersteht, nur um so eher die Seitenlinie für gleich groß mit ihrem Bogen im Trapeze gehalten werden könnte, als die Seite des Polygons, welche ja auch die Seite des Trapezes ist, mit ihrem anliegenden Bogen von $^4/_n\,Q$. Und wirklich würde sich der Archimedeische Satz in seinem Beweise dieses Vortheils erfreuen über andere Sätze, wo Polygone und Kreise als gleich gestellt werden, wenn die Seitenlinien als Tangenten so an die Bogen beschrieben wären, daß die Berührungspunkte zugleich auch immer in der Mitte der Bogen sich befänden. Dieses ist aber niemals der Fall, welches sich bei jedem Bogen leicht zeigen läßt. (S. Fig. 14). Denn da B. G B = B. G K, so B. G B ∠ B. G S, $^2/_n\,Q \angle {}^2/_n\,Q + a$; ferner da B. H S ∠ B. H L, so noch mehr B. H S ∠ B. H T, $^2/_n\,Q - a \leqq {}^2/_n\,Q + b$; ebenso B. J T ∠ B. J A, $^2/_n\,Q - b \angle {}^2/_n\,Q + c$. Da die Berührungspunkte auf dem Quadranten selbst schon liegen als fest und unverrückbar, so müßte also immer, während die Tangente vom Berührungspunkte nach unten hin mit einem kleinern Kreisstücke für gleich angenommen wird, die gleiche Tangente vom Berührungspunkte nach oben hin als gleich mit einem viel größeren Kreisstück gelten. Der Unterschied aber zwischen diesen kleinen Kreisstückchen, der anfangs gering ist, wächst bei jeden folgenden immer mehr uud mehr, so daß zuletzt derselbe zwischen den beiden letzten Kreisstücken weit mehr beträgt, als das erste Kreisstückchen ist. Da das erste nemlich $^2/_n\,Q$, das folgende Kreisstückchen $^2/_n\,Q + a$, so ist ihr Unterschied $a = \alpha$; zwischen dem dritten und vierten Kreisstückchen ist, da ersteres $^2/_n\,Q - \alpha$, letzteres $^2/_n\,Q + b = {}^2/_n\,Q + \alpha + \beta$, der Unterschied $2\alpha + \beta = b + a$, und da das



(Figur 14.)

fünfte Kreisstückchen $^2/_n\,Q - b = {}^2/_n\,Q - \alpha - \beta$, und das sechste $^2/_n\,Q + c = {}^2/_n\,Q + \alpha + \beta + \gamma$, so ist ihr Unterschied $2\,\alpha + 2\,\beta + \gamma = c + b$, ebenso wird der Unterschied der zwei folgenden Kreisstückchen $d + c$, dann $e + d$ und so fort betragen. Da nun das letzte Kreisstückchen $^2/_n\,Q + {}^2/_n\,Q = {}^4/_n\,Q$ beträgt, das nächstvorhergehende bei weitem nicht $^2/_n\,Q$, so ist ihr Unterschied mehr als $^2/_n\,Q$, denn derselbe ist $z + y = {}^2/_n\,Q + y$, mithin größer als das unterste Kreisstückchen. Aber das letzte Kreisstückchen $J\,A = {}^4/_n\,Q$ ist doppelt so groß als das das erste $B\,G = {}^2/_n\,Q$. Dieselbe Tangente also, welche für gleich gehalten wird einem Bogen $^2/_n\,Q$, muß nach solcher gewöhnlichen Annahme im Beweisverfahren auch für gleich gelten einem Bogen von $^4/_n\,Q$, und das nicht allein, sondern auch, da das vorletzte Kreisstückchen $J\,T = {}^2/_n\,Q - y = \omega$, wo ω das letzte Theilchen von Bogen $M\,A$ bezeichnet, welches dem vom halben Polygonwinkel genommenen letzten Winkel von $^4/_n\,R$ als kleiner Kreisbogen convex entgegensteht, muß jene Tangente auch für ω gleich genommen werden.

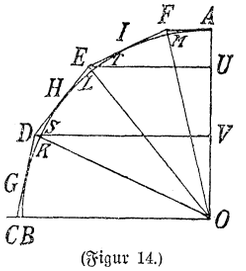
Und nun dieses angenommen, wie wir es ja annehmen müßten, welche Schlüsse werden sich daraus ergeben? Wenn es gar keinen Unterschied ausmachen sollte, ob ich eine Tangente für $^2/_n\,Q$ oder für $^4/_n\,Q$ gleich nähme, so müßte, da es beim Quadranten $^n/_2 - 1 = \frac{n-2}{2}$ zu berücksichtigende Tangenten gibt, ebensowohl $\frac{n-2}{2} \times {}^2/_n\,Q = \frac{n-2}{n}\,Q$ ein annäherndes Resultat zur Viertelperipherie des Kreises geben, wie $\frac{n-2}{2} \times {}^4/_n\,Q = \frac{2\,(n-2)}{n}\,Q$. Aber letzteres ist ja das Doppelte von ersterem. Wie kann denn überhaupt das Doppelte als gleich angenommen werden seinem Einfachen, mögen die Größen auch noch so klein sein als sie wollen. In einer Zusammenrechnung mag man wohl das Doppelte ebensowenig achten wie das Einfache, wenn die Größen gar klein sind, und sowohl dieses wie jenes vernachläßigen; aber vorerst beide Größen als gleich annehmen um damit weitere Rechnungen zu machen, bei denen es gleichgültig wäre, ob wir uns der einen oder der andern bedienen, wer mag solchen Irrthum zugeben? Der consequenten Durchführung, zu welcher sich dann Jemand berechtigt glaubte, nicht allein den Bogen von 90^0 dem von 180^0 gleich zu halten, sondern auch die mit dem Quadranten beschriebene Fläche der Halbkugel als gleich anzunehmen der mit dem Halbkreis beschriebenen hätte man ja nichts entgegenzusetzen.

Dann aber auf welche Weise sollte die vollständige Bedeckung der Bogen von ihren Tangenten erfolgen? Bedeckt $E\,J$ genau ihren Bogen $J\,T$, daß nichts übrig bleibt, so auch alle Tangenten nur ein Kreisstück $J\,T = \omega$; daher würde weit mehr als die Hälfte des Quadranten nicht von den Tangenten bedeckt wer-

Hosted by Google

den können, und dann machen also auch die Gesammtflächen der Kegelzonen bei weitem nicht die Oberfläche der Halbkugel aus. Würde aber die letzte Tangente J F zu ihrem Bogen J A als maßgebend genommen, so müßten auch alle Tangenten ein Kreisstück gleich J A bedecken können, und es bliebe also bei dem kleinsten Bogen J T und vielen andern kleinen der größte Theil der Seitenfläche von der Kegelzone erübrigt, welcher nichts von der Kugel zu bedecken hätte. Verführe man nach einem mittleren Maßstab, daß etwa die Tangente für einen Bogen von $^3/_n$ Q genau genügte, so hätten wiederum die kleinern Bogen zu viel für ihre Bedeckung und die größern zu wenig. Es läßt sich also platterdings nicht absehen, wie man zu verfahren hätte, damit die Tangenten vollständig und genau jedesmal ihre Bogen bedecken können, es müßten denn die Berührungspunkte verrückt werden oder zu den gleichen Tangenten müßten auch durchaus gleiche Bogen gehören.

Wiederum aber müßten, da zu gleichen Tangenten nothwendig gleiche Bogen gehören, aber auch die gleichen Tangenten zu verschiedenen Bogen genommen werden, diese Bogen unter einander für gleich gelten. (S. Fig. 14.) Daher



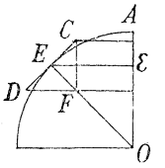
(Figur 14.)

Bogen G B, welcher gleich B. G K, auch gleich B. G S, also muß S in K fallen, ebenso T in L und so fort. Ist dieses aber, so geht die Linie D S also auch in der Richtuug D K auf den Mittelpunkt O zu, und die Linie E T in der Richtung E L auf denselben Mittelpunkt O. Mithin werden die Parallelen mit dem Halbmesser C O stets mit den großen Polygonshalbmessern der Richtung nach zusammenfallen müssen. Es wird aber dadurch die Höhe jedes Trapezes gleich dem Sinus des Bogens von $^4/_n$ Q, und da bei sehr großer Kleinheit dieser Sinus für sein Theil Kreisstück gelten kann, ergibt sich die Summe aller Höhen $^1/_2\ \pi . r$ statt r. Ebenfalls ist nun die Höhe eines Trapezes gleich der Seitenlinie, und da das Produkt der Seitenlinie in die mittlere Parallele gleich dem Halbmesser in die Höhe, so muß auch jede Parallele gleich dem Halbmesser sein. Mithin gehen die Parallelen nicht bloß der Richtung nach dem Mittelpunkte des Quadranten zu, sondern es ist auch jede gleich dem großen Polygonshalbmesser und endigt in dem Mittelpunkt. Wenn aber dieses, wie kann denn da überhaupt von Trapezen die Rede sein, da jedes Trapez in ein Dreieck aus den beiden großen Halbmessern und einer Seite des Polygons übergehen muß!

Sollte nun nach alle dem der Archimedeische Satz so seine Gültigkeit haben, so müßte, da die Höhe $^1/_2\ \pi . r$ statt r werden, auch $^1/_2\ \pi . r$ gleich r, also π gleich 2 statt 3,14 sein, oder der Quadrant müßte gleich dem Halbmesser ein; ebenso (S. Fig. 15) da $E O \times C F = C D \times E \varepsilon$, aber C F gleich C D

Hosted by Google

wird, auch E O gleich E ε werden, oder jede halbe Sehne, sie sei gezogen wo sie wolle, müßte gleich dem Halbmesser sein. Was ist denn nun falscher als solche Behauptung, welche aber eine folgenrechte Durchführung solchen Beweises des Archimedeischen Satzes als gerechtfertigt ergeben würde.



(Figur 15.)

Man könnte nun einwenden, alle diese Folgerungen ergeben sich, weil wir stets angenommen haben, daß eine solche Doppeltangente aus zwei gleichen kleinern Tangenten bestände; wie aber dann, wenn die kleinern Tangenten nicht unter sich gleich genommen würden. Wir wollen daher auch noch diesen letzten möglichen Fall betrachten, nach welchem die Trapeze in und um den Quadranten konstruirt werden können. (S. Fig. 14.) Ist G D größer oder kleiner als C G, so mußten auch so, wenn D V die Parallele, S deren Durchschnitt mit dem Kreis, und K der Durchschnitt des größern Halbmessers ist, nichtsdestoweniger, soll G D gleich Bogen G S sein, die Punkte S und K zusammenfallen und also D S V nach dem Mittelpunkt gehen, weil die sehr kleine Tangente des Polygons ja auch gleich dem zustehenden Kreisbogen ist, und weil auch H D sowohl gleich B. H S als B. H K wird; also würden auch die Höhen der Trapeze die Sinus der Bogen werden, die Trapeze selbst in Dreiecke übergehen und mithin alle die Uebelstände wieder hervortreten, welche wir vorhin gerügt haben. Und außerdem würde dann auch noch, da die von der Mitte der Seitenlinie zum Mittelpunkt des Kreises gezogene Linie nun größer wird als der Halbmesser, die Kegelzone eigentlich etwas sehr wenig mehr sein müssen als $2\pi . r . h$, nemlich $2\pi . h\ (r + {}^1/_n)$.

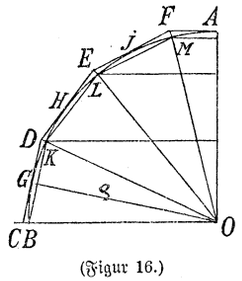
Dennoch hat es seine unbestrittene Richtigkeit, daß nach Archimedes der Inhalt der Oberfläche der Halbkugel gleich $2\pi . r^2$, und folglich der ganzen Kugel gleich $4\pi . r^2$ ist, und der Beweis hiervon ist wirklich sehr leicht Wenn man sich nemlich um denselben Quadranten A B, oder auch um völlig gleiche die Viertelstheile gelegt denkt von mehreren solcher Polygonen, deren Seitenanzahl, wenn sie durch 2 getheilt wird, wieder noch eine ganze Zahl gibt, aber nicht mehr, wenn sie durch 4 getheilt wird, so werden durch die Umdrehung des Quadranten und der (durch Parallelen mit einem großen Halbmesser entstandenen) Trapeze um den andern unbeweglichen Kreishalbmesser als Achse — sammt der Halbkugel die Summen von zusammenliegenden abgekürzten Seitenkegelflächen gebildet, wo je eine Summe gleich jeder andern ist, denn jede ist gleich $2\pi . r^2$ oder gleich der Seitenfläche desjenigen geraden Cylinders, dessen Grundflächenhalbmesser gleich der Höhe, auch gleich dem Halbmesser der Halbkugel, gleich r ist. Je eine Summe der zusammenliegenden abgekürzten Kegel hat mit jeglicher andern denselben oder doch gleichen untern Grundflächenkreis, aber die obern Grundflächenkreise sind verschieden, und zwar hat eine Summe der zusammenliegenden abgekürzten Kegel einen größern obern Grundflächenkreis als eine andere Summe,

Hosted by Google

wenn die Anzahl ihrer abgekürzten Kegel weniger beträgt als die Anzahl der abgekürzten Kegel der andern Summe. Von je mehr, also auch kleinern Seiten das Viertelpolygon um den Halbkreis gelegt ist, um so kleiner wird bei der Umdrehung der obere Grundflächenkreis. Hat nun das Viertelpolygon unendlich viele Seiten, so wird auch der obere Grundflächenkreis unendlich klein, daß er füglich kann vernachläßigt werden. Dann wird aber durch die Seitenflächen ziemlich ganz genau auch die Halbkugel bedeckt, und da bei unendlicher Kleinheit die Tangente vom anliegenden Kreisbogen nicht verschieden ist, so auch nicht die Fläche, welche durch die Tangente beschrieben wird von der, welche mit dem in gleichem Abstande stehenden gleichen Kreisbogen beschrieben wird. Da nun die Seitenfläche solcher abgekürzten Kegel die ganze Halbkugel decken, und gleich $2\pi.r^2$ sind, so muß auch die Halbkugel gleich $2\pi.r^2$ sein.

Dieß also ist der Grund der Gleichheit der Halbkugeloberfläche mit der Seitenfläche des Cylinders gleichen Halbmessers und gleicher Höhe. Nicht aber darf die Seite des Trapezes als gleich geachtet werden können dem zustehenden Kreisbogen, der durch die Parallelen abgeschnitten ist, sondern nur dem, der durch die Halbmesser begrenzt ist.

Noch deutlicher wird der Beweis, wenn man sich ebenso wie um den Quadranten die Viertelpolygone, so in demselben ebensoviele Viertelpolygone mit entsprechenden Seitenanzahlen gelegt denkt und zwar so, daß die Seiten des innern Polygons mit denen des äußern parallel laufen, also während eine Seite des umgelegten Polygons zwar den obern Punkt A des Quadranten trifft, aber keine den untern B, so umgekehrt eine Seite des innern Polygons den Punkt B und keine A. (S. Fig. 16.) Durch die Umdrehung um den einen unbeweglichen Halbmesser A O entstehen nun ebenso die Summen von zusammenliegenden abgekürzten Kegeln aus dem innern Viertelpolygon, wie sie aus dem äußern entstanden. Auch hier werden die Seitenflächen je einer Summe denen jeglichen andern gleich, und bezeichnet man die senkrechte aus dem Mittelpunkt des Quadranten auf eine innere Seite mit ϱ, so wird jede solche Seitenfläche gleich $2\pi\varrho^2$ sein. Ist nun die Seite des innern Viertelpolygons unendlich klein, so muß ϱ unendlich nahe gleich r sein, der obere Grundflächenkreis wird dann auch unendlich klein, daß man ihn vernachläßigen kann, und wenn man dann $2\pi.r^2 = 2\pi\varrho^2$ setzen kann, aber die Fläche der Halbkugel zwischen den Seitenflächen der äußern und denen der innern abgekürzten Kegeln liegt, so muß auch die Fläche der Halbkugel gleich $2\pi.r^2$ sein. — Nemlich alle äußern bedeckenden Flächen um die Halbkugel betragen $2\pi r^2 + {}^1/_n$, größer als die Fläche der Halbkugel und alle innern, der



(Figur 16.)

Hosted by Google

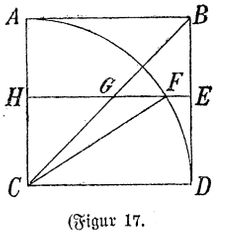
Halbkugelfläche anliegenden Flächen $2\pi\varrho^2 + {}^1/_{n'}$, kleiner als die Halbkugelfläche. Da aber $r = \varrho$ gesetzt werden kann, und ${}^1/_n = 0$, auch ${}^1/_{n'} = 0$, so ist Halbkugelfläche gleich $2\pi r^2$.

Die Halbkugelfläche ist immer größer als alle innern Seitenflächen, auch selbst noch, wenn diese um die obere von einer halben Seite gebildeten kleinen Kreisfläche vermehrt wird; und dieselbe Halbkugelfläche weniger dem obersten von den Seitenflächen nicht bedeckten Stück ist kleiner als alle äußern Seitenflächen, folglich die ganze Halbkugelfläche gleich allen äußern Seitenflächen.

Oder wenn man die Halbkugelfläche ohne das oberste unendlich kleine Stück P nennt, so wird $2\pi . r^2 \nearrow P$, und zwar $2\pi . r^2$ um ein unendlich kleines größer als P, oder es ist $2\pi r^2 - \frac{1}{\infty} = P$; aber es ist auch $P + \frac{1}{\infty}$, P vermehrt um das oberste unendlich kleine Stück gleich der Halbkugelfläche. Da nun $2\pi r^2 - \frac{1}{\infty} = P$, oder $2\pi r^2 = P + \frac{1}{\infty}$, so $2\pi r^2$ gleich der Halbkugelfläche.

Wenn man nun die Kugeloberfläche weiß, nemlich $4\pi r^2$, so könnte man daraus auch den körperlichen Inhalt der Kugel selbst finden. Denkt man sich die ganze Oberfläche getheilt in viele unendlich kleine Theile, daß dieselben als Kreisflächen, Flächen von Dreiecken oder Polygonen, regelmäßiger oder unregelmäßiger betrachtet werden können, so hat man, wenn man sich auch noch die Halbmesser hinzudenkt, ebensoviele Pyramiden oder Kegel von gemeinsamer Höhe, dem Halbmesser, deren Spitze alle im Mittelpunkt der Kugel zusammenkommen. Nun ist der Inhalt aller dieser Pyramiden ein Drittel der Summe ihrer Grundflächen multiplicirt mit ihrer gemeinsamen Höhe. Aber die Summe der Grundflächen beträgt die Kugeloberfläche, also $4\pi r^2$, daher ist der Kugelinhalt ${}^1/_3 r . 4\pi . r^2 = {}^4/_3 \pi r^3$.

Aber man hat auch einen andern eignen Beweis für den Inhalt der Kugel, zu welchem man sich so ziemlich derselben Figur bedient, die auch Cicero auf dem Grabmal des Archimedes zu Syrakus entdeckt hatte. (S. Fig. 17.) Wenn nemlich um dieselbe Achse A C Quadrat A C D B, Quadrant A C D und Dreieck A B C sich herumbewegen, und man also die betreffenden Stücke, Cylinder, Halbkugel und Kegel erhält, so läßt sich zeigen, daß der in einem beliebigen Punkte E der Seitenlinie des Cylinders angebrachte, mit der Grundfläche parallele Schnitt durch Cylinder, Halbkugel und Kegel solche drei Kreisflächen von Cylinder, Halbkugel und Kegel hervorbringt, daß die des Cylinders gleich ist der Summe aus der der Halbkugel und der des Kegels.

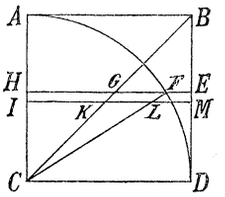


(Figur 17.

Denn $\overline{CD}^2 = \overline{CF}^2 = \overline{CH}^2 + \overline{HF}^2$, aber $CH = HG$, weil HG parallel mit AB, und $AB = AC$, also auch $\overline{CD}^2 = \overline{HG}^2 + \overline{HF}^2 = \overline{HE}^2$, oder $\varrho^2 = R^2 + r^2$,

Hosted by Google

also auch $\pi \varrho^2 = \pi R^2 + \pi r^2$. Dieses gilt überall, man mag den Punkt E auf einer Seitenlinie B D nehmen, wo man will. Daher wird auch die Summe aller unendlichen parallelen Flächen des Cylinders gleich der Summe aller parallelen unendlichen Flächen der Halbkugel vermehrt um die Summe aller unendlichen parallelen Flächen des Kegels. Daraus ergibt sich allerdings der ganz richtige Schluß, daß die Halbkugel $^2/_3$ des Cylinders und das Doppelte des Kegels an Inhalt betragen müsse, und also hat es auch Archimedes verstanden. Aber nun nehme man jedes beliebige Lehrbuch der Geometrie zur Hand, wo über diesen Beweis verhandelt wird. Daselbst wird man gewöhnlich finden, wie man von diesem ganz richtigen Schluß absteht, aber es versucht, auf anderem Wege zu dem Erweis des Satzes zu gelangen, und es gibt vorzüglich eine zweifache Verfahrungsweise, nach welcher man die weiteren Folgerungen ableitet. (S. Fig. 18.) Nach der erstern soll unmittelbar auch ein ganz dünnes ausgeschnittenes, mit der Grundfläche des Cylinders paralleles Scheibchen des Cylinders, durch welches man zugleich auch das Scheibchen der Halbkugel wie des Kegels begrenzt erhält, gleich der Summe der beiden Scheibchen der Halbkugel und des Kegels sein, folglich auch die Summe der bei einander liegenden Menge von Scheibchen des Cylinders auch gleich der Summe der entsprechenden Scheibchen der Halbkugel vermehrt um die Summe der Scheibchen des Kegels, und daher auch Inhalt des ganzen Cylinders gleich dem der Halbkugel und des Kegels zusammen genommen. Aber dann müßten entweder die Scheibchen für die Kreisflächen selbst gelten, und wie wird dann ein Körper aus bloßen Flächen, oder wenn die Scheibchen des Cylinders der Halbkugel und des Kegels keine Flächen, sondern Körperchen sind, wie kann man denn so ohne Weiteres, ohne einen Beweis beizubringen, annehmen, daß auch die Körperchen des Cylinders der Halbkugel und des Kegels in eben solchem Verhältniß zu einander stehen wie die begrenzenden Kreisflächen. Dieses kann ja doch nicht anders der Fall sein, als wenn die Körperchen gebildet würden dadurch, daß jedes aus dem Product seiner Kreisfläche und der gemeinsamen Höhe hervorginge, und wenn dieses, so wäre allgemein, selbst wenn die Körperchen zum ganzen Cylinder der Halbkugel und dem Kegel heranwüchsen, auch dann einmal, wenn C D der Grundflächenhalbmesser des Cylinders ist, die Halbkugel gleich dem Cylinder und Kegel gleich Null, und wiederum, wenn A B der Grundflächenhalbmesser, wäre die Halbkugel gleich Null und Kegel gleich Cylinder.

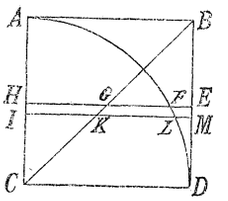


(Figur 18.)

Vorsichtiger allerdings gehen Andere zu Werke. Diese sagen es entschieden und mit aller Bestimmtheit aus, daß die vorhin angegebenen Scheibchen Körperchen seien, bei welchen man aber das der Halbkugel sowohl wie das des Kegels wegen

Hosted by Google

der sehr geringen Entfernung der parallelen Kreisflächen als ein kleines Cylinderchen betrachten könne. (S. Fig. 19.) Es wäre also auch E M gleich und parallel mit F L und mit G K zu achten. Dann ist also ein Scheibchen der Halbkugel sowohl wie des Kegels, weil sehr nahe kommend, als gleich gesetzt immer einem dasselbe umgebenden Cylinderchen gleicher Höhe und gleicher Kreisfläche und das Kugelstückchen vermehrt um das Kegelstückchen gleich dem Cylinderstückchen, weil sehr nahe kommend. Nun wird freilich der Unterschied des ganzen Cylinders und der Summe aller Cylinderchen der Halbkugel gleich der Summe aller Cylinderchen um den Kegel sein müssen, und wenn die Summe aller Cylinderchen der Halbkugel gleich der Halbkugel und die Summe aller Cylinderchen um den Kegel gleich dem Kegel selbst wäre, wie es Jene unbedingt annehmen, so müßte die Halbkugel, weil der Kegel $^1/_3$ des Cylinders, auch $^2/_3$ desselben ausmachen, und daraus ergäbe sich dann die Oberfläche der Halbkugel $2\pi . r^2$, oder der ganzen Kugel $4\pi . r^2$.



(Figur 19.)

Jedoch wenn ein kleines Kegelstückchen für an Inhalt gleich gehalten wird seinem umgebenden Cylinderchen, so mag das wohl erlaubt sein (so sehr auch der Unterschied zwischen ihnen bedeutender ist als zwischen dem Kegelstück und seinem Cyltnderchen, da derselbe bei der kleinsten Höhe zu erscheinen beginnt, so wie auch sogleich im geringen Anfang ein spitzer Winkel abweichend vom rechten sich zeigt, aber dennoch) der Fehler ist so äußerst unbedeutend, daß er gar nicht in Betracht kommen kann. Aber wenn nun eine sehr große Menge der Kegelstückchen der Menge der umgebenden Cylinderchen für gleich gelten soll, so muß doch Jeder, sollte ich denken, sogleich einsehen, daß dieses nicht mit demselben Rechte mehr geschehen kann, mit dem vorhin ein einiges Kegelstück für gleich seinem umgebenden Cylinderchen gehalten wurde. Denn nun könnte ja die Summe der sehr vielen vernachläßigten Unterschiede schon eine bemerkliche Größe ausmachen. Sind nemlich dieselben der Reihe nach $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, \eta$ u. s. w., so wird die Summe aller Cylinderchen gleich dem ganzen Kegel vermehrt um eine sehr große Anzahl von Summanden, nemlich $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon +$ ꝛc. und so klein auch jeder einzelne für sich ist, so ist vielleicht doch die Gesammtsumme derselben eine nicht mehr zu vernachläßigende Größe. Wird ja doch sonst immer darauf gesehen, daß man das sehr Kleine zwar einzeln nicht beachtet, aber für das sehr vielmal genommene Kleine eine bestimmte bemerkbare Größe setzt. Deßhalb könnte auch der ganze Kegel um ein Merkliches kleiner sein als die Summe aller ihn umgebenden Cylinderchen. Da nun die Summe aller umgebenden Cylinderchen des Kegels größer ist als $^1/_3$ des Cylinders, größer als der Kegel, so müßte die Summe aller Cylinderchen der Halbkugel kleiner als $^2/_3$ des Cylinders sein. Aber es soll auch die Summe

aller Cylinderchen der Halbkugel gleich $^2/_3$ des Cylinders, gleich der Halbkugel sein. Mithin läßt sich auch so nicht ganz genau beweisen, daß die Halbkugel $^2/_3$ des Cylinders, dessen Grundflächenkreis der Aequator der Halbkugel, und dessen Höhe ihr Halbmesser ist, also auch nicht, daß die ganze Kugel $^2/_3$ sei solchen Cylinders zweimal genommen; daher auch nicht die Folgerung daraus, daß die Oberfläche der Kugel $4\pi r^2$ betragen müsse.

Wie anders aber nun nach Archimedes, dessen Figur dieses Scheibchen H J M E nicht kennt, indem die parallele J M gänzlich darinnen fehlt.

Weil von allen Flächen auf den Inhalt der Körper geschlossen wurde, so scheint es, als wenn jene neueren Mathematiker dieses für nicht so ganz klar und selbstverständlich gehalten hätten, weil ja aus selbst unendlichen Flächen niemals ein Körper wird, wenn nicht auch dabei die Höhe oder dritte Dimension gegeben ist. Aber ist denn nicht auch die dritte Dimension, die Höhe gegeben? Ist es nicht ein Unterschied zwischen unendlichen Flächen überhaupt und unendlichen Flächen in einer gewissen Distanz? Ist diese Entfernung denn nicht die dritte Dimension, die Höhe? Ist es denn etwas Verschiedenes der Körper selbst, oder seine unendlichen parallelen Flächen in der angegebenen Höhe oder Entfernung? Wie denkt man sich denn überhaupt, daß ein Körper entstehe? Doch wohl dadurch, daß eine Fläche sich immer selbst parallel an einer geraden Linie hin bewegt. Bei dieser Bewegung können nun aber die Flächen entweder sich immer gleich bleiben, wie dieses bei der Entstehung des Cylinders geschieht, oder sie verändern sich auch fortwährend nach einem gewissen Gesetze, dessen Verschiedenheit auch die verschiedene Gestaltung der entstehenden Körper bedingt, wie dieses bei der Halbkugel und dem Kegel der Fall ist. So kann man sich z. B. die Halbkugel als entstanden denken, daß ein größter Kugelkreis, sich immer selbst parallel auf einer im Mittelpunkte des Kugelkreises senkrecht stehenden Linie, welche gleich dem Halbmesser des Kreises hinaufbewegt wird bis zur Spitze mit dem Gesetze, daß der Kreis fortwährend seine Größe ändert, aber ein Kreis bleibt mit dem Mittelpunkt auf der senkrechten, bis der letzte Kreis an der Spitze selbst Null wird, und daß alle unendlichen Kreise vom größten Kugelkreise bis zum letzten an der Spitze gleich Null ihre Begrenzung haben in einem Quadranten des größten Kreises. Was sind das nun für andere Flächen der Bewegung, als die gesammten der Halbkugel, welche man durch parallele Schnitte erhalten soll? Und haben nicht dieselben beiderseits dieselbe Höhe dabei gegeben? Machen nicht ebenso die parallelen Schnitte in der gegebenen Entfernung die Halbkugel aus, wie die Fläche, welche unter dem angegebenen Gesetz sich auf der Linie der Höhe bewegt hat? Kann man nicht die Halbkugel so bestimmen, daß sie aus solchen unendlichen parallelen Flächen bestände, welche in der Entfernung von der Höhe des Halbmessers vorhanden sind?

Hosted by Google

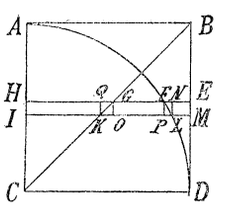
Ebenfalls ein Kegel, was ist er anders, als die Summe seiner unendlichen parallelen Flächen in der gegebenen Höhe? Man kann sich ihn ebenso wie die Halbkugel entstanden denken; nur das ist dann dabei anders, daß wenn bei den Flächen der Halbkugel die Begrenzung von der Spitze bis zu einem beliebigen Punkte der Peripherie des Grundflächenkreises ein Quadrant war, diese bei dem Kegel eine gerade Linie sein muß.

Wenn also die Summe aller parallelen Flächen des Kegels in der Höhe, welche gleich dem Halbmesser des Grundflächenkreises mit dem Kegel selbst einerlei ist, ebenso dieses ähnlich der Fall ist bei den parallelen Flächen des Cylinders und der Halbkugel, aber der Kegel $^1/_3$ des Cylinders ausmacht, so müssen auch alle parallelen Flächen des Kegels von allen unendlichen parallelen Flächen des Cylinders gleicher Höhe abgezogen, den Inhalt der Halbkugel darstellen, weil sie alle parallelen unendlichen Flächen derselben in der gegebenen Höhe ausmachen. Es muß also die Halbkugel $^2/_3$ solchen Cylinders sein.

Oder auch: es verhalten sich doch alle parallelen unendlichen Flächen des Kegels in der gegebenen Höhe zu dem Kegel selbst, wie alle parallelen Flächen des Cylinders von derselben Höhe zu dem Cylinder selbst; denn dieß ist eine identische Proportion. Da nun der Kegel $^1/_3$ des Cylinders, so müssen auch alle jene parallele Flächen des Kegels $^1/_3$ betragen von allen parallelen Flächen des Cylinders; folglich alle unendlichen parallelen Flächen der Halbkugel machen $^2/_3$ aus von allen parallelen unendlichen Flächen des Cylinders in der bekannten gleichen Höhe. Also muß auch die Halbkugel selbst $^2/_3$ des Cylinders betragen.

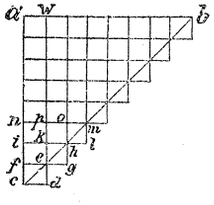
Wir hatten es uns in der Betrachtung des Archimedeischen Satzes vorzüglich zur Aufgabe gestellt, den Beweis, der für denselben durch die den Halbkreis umstellten kleinen Trapeze und durch die eine Kugel einschließenden kleinen Kegelstücke gegeben wird, so wie er gewöhnlich gegeben wird, in seiner ganzen Unbestimmtheit und Ungenauigkeit darzustellen; von dem andern oder zweiten Beweis, den man für die Richtigkeit des Archimedeischen Satzes aufstellt, und welchen man daraus folgert, daß der mit dem Grundflächenkreis des Cylinders, der Halbkugel und des Kegels parallele Schnitt immer den Kreis des Cylinders gleich macht der Summe der Kreise von Halbkugel und Kegel, hatten wir auch schon dargethan, wie keineswegs, indem man den von Archimedes eingeschlagenen richtigen Weg verließ, die dafür aufgestellten andern Beweise richtig geführt und genügend sein könnten, da ja weder die Summe der Flächen gleich der Summe kleiner Körperchen ist, noch auch die Summe vieler kleiner Cylinderchen des Kegels wie der Halbkugel mit dem Kegel selbst und der Halbkugel als gleich angenommen werden kann. — Wenn aber nun ein kleines Scheibchen des Kegels sowohl wie der Halbkugel durch ein an Inhalt nahekommendes Cylinderchen ausgedrückt werden soll, so läßt sich dieses auf zweifache Weise darstellen (S. Fig. 20.);

Hosted by Google

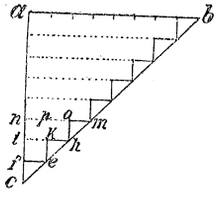


(Figur 20.)

so Kugelscheibchen H J L F entweder durch Cylinderchen H J L N oder Cylinderchen H J P F, ebenso Kegelscheibchen H J K G durch Cylinderchen H J K Q oder Cylinderchen H J O G, und es ist Cylinderchen H J M E = HJLN+HJKQ, und Cyl. HJME=HJPF+HJOG, also immer das Cylinderchen des großen Cylinders entweder gleich dem Außencylinderchen der Halbkugel vermehrt um das Innencylinderchen des Kegels, oder Cylinderchen des großen Cylinders gleich dem Innencylinderchen der Halbkugel vermehrt um das Außencylinderchen des Kegels. Mithin ist auch ganzer Cylinder gleich der Summe aller Außencylinderchen des Kegels vermehrt um alle Innencylinderchen der Halbkugel, und ebenfalls gleich der Summe aller Innencylinderchen des Kegels vermehrt um alle Außencylinderchen der Halbkugel. Von der Größe aller Außencylinderchen des Kegels läßt sich also wohl schließen, daß die Summe aller Innencylinderchen der Halbkugel kleiner sein muß als $^2/_3$ des großen Cylinders; ebenfalls da die Summe aller Innencylinderchen des Kegels kleiner als $^1/_3$ des großen Cylinders, kleiner als der Kegel, so folgt daraus, daß die Summe aller Außencylinderchen der Halbkugel größer sein muß als $^2/_3$ des großen Cylinders. Da nun die Halbkugel kleiner als alle Außencylinderchen und größer als alle Innencylinderchen, oder kleiner als etwas, was größer als $^2/_3$ des Cylinders und größer als etwas kleiner als $^2/_3$ des Cylinders, so wäre die Möglichkeit für die Größe der Halbkugel selbst, daß sie kleiner als $^2/_3$ des Cylinders, daß sie gleich $^2/_3$ des Cylinders, daß sie größer als $^2/_3$ des Cylinders sei. Bedenkt man, daß diese Cylinderchen sich sehr enge an die Halbkugel anschließen können, daß ihr Unterschied äußerst gering sein muß, so liegt es allerdings sehr nahe, ja eben hieraus nun gerade den Schluß zu machen, die Halbkugel müsse $^2/_3$ des Cylinders sein. Woher nun der entschiedene Beweis? (S. Fig. 21 a. u. b.)



(Figur 21 a.)



(Figur 21 b.)

Es seien n Außencylinderchen des Kegels und also (n—1) Innencylinderchen, so nehmen dieselben von dem ersten untersten kleinsten c d e f dem Außencylinderchen und f e k i dem Innencylinderchen, je weiter zum Grundflächenkreis hinauf an Größe und Inhalt zu. Ist nun c f = h = f e, so ist erstes Außencylinderchen $c\,d\,e\,f = \pi\,h^3$, zweites Außencylinderchen $f\,g\,h\,i = \pi.\ (2\,h)\ ^2h = \pi\,h^3.\,2^2$; drittes Außencylinderchen $i\,l\,m\,n = \pi\,(3\,h).^2\,h = \pi\,h^3.\,3^2$; folglich die Cylinderchen der Reihe nach $\pi\,h^3$ $(1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + \text{ꝛc.})$ Da die Gesammtsumme der Vierecks-

Hosted by Google

zahlen gleich $\frac{n(n+1)\ (2n+1)}{1.\ 2.\ 3.}$, so ist der Gesammtwerth von n Außencylinderchen $\frac{\pi.\,h.^3\,n.\,(n+1)\ (2n+1)}{1.\ 2.\ 3}$. Ebenso der Gesammtwerth aller Innencylinderchen, deren es $(n-1)$ gibt, gleich $\frac{\pi.\,h^3.\,(n-1)\,n\ (2n-1)}{1.\ 2.\ 3}$. Der ganze große Kegel ist $\frac{\pi.\,(n\,h).^2\,n.\,h}{3} = \frac{\pi.\,h.^3\,n^3}{3}$; mithin der Ueberschuß, das was von den Außencylinderchen über den großen Kegel hervorragt, gleich

$$\frac{\pi.\,h^3\,n\,(n+1)\ (2n+1)}{1.\ 2.\ 3} - \frac{\pi.\,h.^3\,n^3}{3} = \frac{\pi.\,h^3}{3}\left(\frac{2n^3+3n^2+n}{2} - \frac{2n^3}{2}\right)$$

$$= \frac{\pi.\,h^3}{3}\left(\frac{3n^2+n}{2}\right) = \frac{\pi.\,h.^3\,n\,(3n+1)}{6} = \frac{\pi.\,r^3\,(3n+1)}{6\,n^2} = \text{Keg}\,\frac{3n+1.}{2\,n^2.}$$

Ebenso ist das, was dem Werthe der Innencylinderchen noch fehlt, um den ganzen großen Kegel auszumachen, nun gleich

$$\frac{\pi.\,h^3\,n^3}{3} - \frac{\pi.\,h^3\,(n-1)\,n\,(2n-1)}{1.\ 2.\ 3}$$

$$= \pi\,h^3\left(\frac{2n^3-(2n^3-3n^2+n)}{1.\ 2.\ 3}\right) = \frac{\pi.\,h^3}{3}\left(\frac{3n^2-n}{2}\right) = \frac{\pi.\,h.^3\,n\,(3n-1)}{1.\ 2.\ 3}$$

$$= \frac{\pi.\,r.^3\,(3n-1)}{6n^2} = \text{Keg}\,\frac{3n-1}{2n^2}.$$

Die Summe der Werthe aller Räume, sowohl derer, welche den Innencylinderchen noch zum ganzen Kegel fehlen, als derer, welche die Außencylinderchen als Ueberschüsse über den Kegel haben, ist $\frac{\pi.\,h.^3\,n\,(3n+1)}{6} + \frac{\pi.\,h^3\,n\,(3n-1)}{6}$

$$= \frac{\pi.\,h^3}{6}\,n\,(3n+1+3n-1) = \frac{\pi.\,h^3}{6}.\ n.\ 6\,n = \pi.\,h.^3\,n^2 = \pi.\,r.^2\,h,$$ d. i. gleich dem letzten größten Außencylinderchen des Kegels. — Dieselben Räume und also auch dasselbe Resultat erhält man, wenn man die Innen- von den Außencylinderchen abzieht $\frac{\pi.\,h.^3\,n\,(n+1)\,(2n+1)}{1.\ 2.\ 3} - \frac{\pi.\,h.^3\,(n-1)\,n.\,(2n-1)}{1.\ 2.\ 3} =$

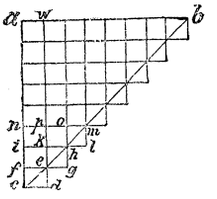
$$= \pi.\,h^3\left(\frac{2n^3+3n^2+n}{1.\ 2.\ 3} - \frac{2n^3-3n^2+n}{1.\ 2.\ 3}\right) = \pi.\,h^3\,\frac{6n^2}{6} = \pi.\,h.^3\,n^2.$$

Der Unterschied des Ueberschusses der Außencylinderchen und des Fehlenden der Innencylinderchen ist gleich: $\frac{\pi.\,h.^3\,n}{6}\,(3n+1-(3n-1)) = \frac{\pi.\,h.^3\,n}{3}$, oder so vielmal das kleine erste Kegelchen c e f, als die Anzahl der Außencylinderchen beträgt, oder auch ist dieser Unterschied gleich $\frac{\pi.\,h.^3\,n^3}{3\,n^2} = \frac{\pi.\,r^3}{3\,n^2} = \frac{\text{Keg}}{n^2}$, gleich dem Inhalt des großen Kegels dividirt durch das Quadrat der Anzahl der Außencylinderchen.

Hosted by Google

Je kleiner nun die Höhe h genommen wird, um so kleiner wird das Kegelchen c e f, und um so größer wird n. Es nähert sich dann sowohl der Ueberschuß als auch das Fehlende immer mehr zum ganzen Kegel hin, und ihr Unterschied wird immer kleiner und kleiner, und wenn n unendlich genommen wird, so ist $\frac{\text{Keg}}{n^2} = o$, also der Unterschied des Ueberschusses der Außencylinderchen und des Fehlenden der Innencylinderchen ist gleich Null zu achten.

Um den jedesmaligen Ueberschuß eines einzigen Außencylinderchen über den Kegel zu finden, drücke man wieder den Werth desselben durch das erste kleinste aus c e f beschriebene Kegelchen aus. Dann ist der Ueberschuß, welchen das Dreieck c d e im Ringe beschreibt, gleich $^2/_3$ des Cylinderchen aus c d e f, oder zweimal dem Kegelchen c e f, d. h. $\frac{2\pi.h^3}{3}$. Der Ueberschuß, welcher aus e g h erhalten wird, ist gleich Cylinderchen f g h i, vermehrt um Kegelchen c e f, vermindert um Kegel c h i, oder gleich $\pi.h.^2 2.^2 h + \frac{\pi.h^3}{3} - \frac{\pi.h.^2 2.^2 2h}{3} = \frac{\pi.h^3}{3}.5$. Der dritte Ueberschuß, aus h l m erhalten, wird Cylinderchen i l m n + Keg. c h i — Keg. c m n =

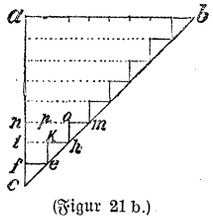


(Figur 21 a)

$= \pi.h.^3 3^2 + \frac{\pi.h^3}{3}.2.^2 2 - \frac{\pi.h^3}{3}.3.^2 3 = \frac{\pi.h^3}{3}(27 + 8 - 27) = \frac{\pi.h^3}{3}.8$. So wird der vierte Ueberschuß $\frac{\pi.h^3}{3}.11$, der fünfte $\frac{\pi.h^3}{3}.14$, und so fort werden. Die Werthe der Ueberschüsse gehen also in arithmetischer Progression also fort: 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20 ꝛc. Ist die Anzahl der Ueberschüsse n, so ist der Werth dieser Summe $S = a.n + (n-1)\frac{d.n}{2} = 2n + \frac{(n-1)3n}{2} = \frac{4n+3n^2-3n}{2} =$

$= \frac{3n^2+n}{2} = \frac{n(3n+1)}{2}$; mithin der Werth aller Ueberschüsse $\frac{\pi.h^3}{3}.\frac{n(3n+1)}{2}$, welches mit dem von uns früher bestimmten Werthe der Ueberschüsse übereinkommt.

Ebenso läßt sich der fehlende Raum jedes einzelnen Innencylinderchen bis zum ganzen großen Kegel bestimmen. Es ist zuerst Kegelchen $c\,e\,f = \frac{\pi.h^3}{3}$, dann der ringförmig gebildete Raum aus e h k gleich Keg. c h i — Cyl. f e k i — Keg. c e f =



(Figur 21 b.)

$= \frac{\pi.h^3}{3}.2.^2 2 - \pi.h^3 - \frac{\pi.h^3}{3} = \frac{\pi.h^3}{3}(8 - 3 - 1)$

$= \frac{\pi.h^3}{3}.4$; der aus h m o gebildete Ring ist gleich

Hosted by Google

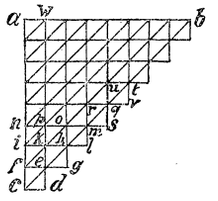
Keg. c m n — Cyl. h o n i — Keg. c h i $= \frac{\pi . h^3}{3} . 3 . {}^2 3 - \pi . h . {}^3 2^2 - \frac{\pi . h^3}{3} . 2 . {}^2 2 =$

$= \frac{\pi . h^3}{3} (27 - 12 - 8) = \frac{\pi . h^3}{3} . 7.$ Folglich ist das Verhältniß der fehlenden Räume im Kegel in arithmetischer Progression also: 1, 4, 7, 10, 13 ꝛc. Die Summe der Werthe aller mangelnden Räume $s = \frac{\pi . h^3}{3} (1 + 4 + 7 + 10 + 13 + \text{ꝛc.}) =$

$\frac{\pi . h^3}{3} \left(n + (n-1) \frac{3}{2} n \right) = \frac{\pi . h^3}{3} \left(\frac{2n + 3n^2 - 3n}{2} \right) = \frac{\pi . h^3}{3} \left(\frac{3n^2 - n}{2} \right) =$

$= \frac{\pi . h^3}{3} . n \left(\frac{3n - 1}{2} \right)$, welches mit dem von uns früher anders bestimmten Werthe der Summe aller fehlenden Räume zum ganzen Kegel übereinstimmt.

Wenn man ebenso wie die äußersten Quadratchen c d e f, e g h k, h l m o, so auch die übrigen durch die mit der Hypotenuse des △ a b c parallelen Diagonalen in zwei Hälften zertheilt (S Fig. 22.), so wird dadurch das Dreieck a b c, aus welchem der große Kegel gebildet wurde, in lauter kleine Dreiecke zertheilt, deren jedes gleich und congruent dem Dreieckchen c e f ist, aus dem das erste Kegelchen gebildet wurde, nach welchem wir die Werthe der Ueberschüsse und des Mangelnden zum großen Kegel bestimmt haben. Dann läßt sich leicht ermitteln, in welchem Verhältniß die Räume zu einander stehen, welche durch zwei im Abstande von der Achse a c nach einander folgenden Dreieckchen beschrieben werden. Es kann nemlich jeder aus einem Dreieckchen erhaltene Ringraum betrachtet werden entweder als das bei dem Außencylinderchen Ueberschießende über den großen Kegel oder als das bei den Innencylinderchen zum ganzen Kegelscheibchen Fehlende, weil die im gleichen Abstande von der Achse liegenden Dreieckchen auch gleiche Räume beschreiben müssen. Daher sind die Räume aus c e f, aus f k i, aus i p n u. s. w. beschrieben einander gleich, jeder ist nemlich $\frac{\pi . h^3}{3}$; von den Räumen aus c d e, aus f e k, aus i k p u. s. w. jeder gleich $\frac{2 \pi . h^3}{3}$; jeder der Räume aus e h k, aus k o p u. s. w. gleich $\frac{\pi . h^3}{3} . 4$; der Raum aus k h o ebenso $\frac{\pi . h^3}{3} . 5$, wie der aus e g h erhaltene. Daher auch die Werthe der aus den Dreieckchen erhaltenen Räume, welche zusammen ein Außencylinderchen ausmachen, wie z. B. die Räume aus den Dreieckchen i p n, i k p, k o p, k h o, h m o, h l m verhalten sich der Reihe nach wie 1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11 und so fort, so daß immer das von der Achse weiter



(Figur 22.)

Hosted by Google

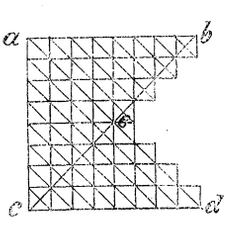
abstehende zunächst folgende Dreieck einen Raum beschreibt, der entweder um $\frac{2\,\pi.\,h^3}{3}$ größer ist als der vom nächst vorhergehenden Dreieck beschriebene, oder um $\frac{\pi.\,h^3}{3}$. Wenn das folgende Dreieckchen mit dem vorhergehenden die Höhen-Kathete gemeinsam hat, so wächst der beschriebene Raum um zwei fernere Kegelchen c e f, also wenn die Dreieckchen in verschiedene Quadratchen gehören; wenn es aber Dreieckchen desselben Quadratchen sind, also sie eine gemeinsame Diagonale haben, so wächst der Raum aus dem von der Achse a c am weitest abstehenden Dreieckchen nur um Ein Kegelchen c e f.

Danach werden die nach dem Kegelchen c e f bestimmten Werthe der Außencylinderchen des Kegels der Reihe nach folgende: 1tes Cylinderchen $\text{c d e f} = \frac{\pi.\,h^3}{3}(1+2)$; 2tes Cyl. $\text{f g h i} = \frac{\pi.\,h^3}{3}(1+2+4+5)$; 3tes Cyl. $\text{i l m n} = \frac{\pi.\,h^3}{3}(1+2+4+5+7+8)$; 4tes Cyl. $\text{n q} = \frac{\pi.\,h^3}{3}(1+2+4+5+7+8+10+11)$; 5tes Cyl. $= \frac{\pi.\,h^3}{3}(1+2+4+5+7+8+10+11+13+14)$. Mithin verhalten sich die Cylinderchen der Reihe nach wie 3, 12, 27, 48, 75, 108, 147 u. s. w. Dieses aber ist eine arithmetische höhere Progression der zweiten Ordnung, indem die Unterschiede der Glieder erst eine gewöhliche arithmetische Progression bilden, nemlich 9, 15, 21, 27, 33, 39 und so fort. Nun ist die Summe einer solchen arithmetischen höhern Progression der zweiten Ordnung $S = (n+1)_2 \,.\, a + (n+1)_3 \,.\, b$, also unsere Reihe bei n Gliedern $S = 3(n+1)_2 + 6.\,(n+1)_3 = \frac{3(n+1).n}{1.\,2} + \frac{6(n+1)n.(n-1)}{1.\,2.\,3} = \frac{9n^2+9n+6n^3-6n}{1.\,2.\,3} = \frac{2n^3+3n^2+n}{2} = \frac{n(2n^2+3n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$, also die Summe aller Außencylinderchen gleich $\frac{\pi.\,h.^3\,n\,(n+1)(2n+1)}{1.\,2.\,3}$, welches mit dem von uns früher auf andere Weise gefundenen Werthe der Außencylinderchen wieder übereinkommt.

Ebenso werden die Innencylinderchen des Kegels $\frac{\pi.\,h^3}{3}\left(\underset{2}{n}\,.\,a + \underset{3}{n}\,.\,b\right)$, welches wenn $a = 3$, und $c = 6$ ist, wieder mit dem früher gefundenen Werthe $\frac{\pi.\,h^3}{3}\cdot\frac{n(n-1)(2n-1)}{2}$ übereinkommt. Denn $s = \underset{2}{n}.a + \underset{3}{n}b = \underset{2}{n}.3 - \underset{3}{n}.6 =$

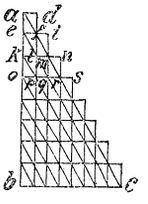
$$= \frac{3n.(n-1)}{2} + \frac{6n(n-1)(n-2)}{1.2.3} = \frac{9n^2 - 9n + 6(n^3 - 3n^2 + 2n)}{1.2.3} =$$
$$= \frac{2n^3 - 3n^2 + n}{2} = \frac{n(2n^2 - 3n + 1)}{2} = \frac{n(n-1)(2n-1)}{2}.$$

Wird jedes der kleinen Quadratchen, welche zusammen alle Außencylinderchen beschreiben, statt durch die mit der Hypotenuse parallele Diagonale durch die andere Diagonale in zwei gleiche Dreieckchen getheilt (S. Fig. 23), so stehen die von diesem Dreieckchen gebildeten Ringräume in eben solchem Verhältniß nach der Entfernung von der Achse a c zu einander, wie dieses bei den Räumen aus dem ersteren Dreieckchen der Fall war. Denn alsdann läßt sich jedes Dreieckchen wie der von demselben gebildete Ringraum betrachten als gehörend zu einem andern gleichen und congruenten Kegel, dessen Grundflächenkreis aber unten ist, wo die Spitze, und dessen Höhe oben, wo der Grundflächenkreis des ersten Kegels war. Sodann sind die Räume aus den Dreieckchen in a c e beiden Kegeln, sowohl dem von a b c als von a c d beschriebenen gemein, und jeder aus einem andern Dreieckchen erhaltene Ringraum im Kegel a b c hat einen gleich weit von der Achse a c abstehenden und daher gleichen Ringraum im Kegel a c d. Nun aber findet im congruenten Kegel a c d dasselbe Gesetz der Räume statt, wie im Kegel a b c. Es verhalten sich daher auch z. B. die einzelnen Ringräume aus den Dreieckchen der obersten Säulenordnung bei a b wie 1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 13, 14 u. s. w., weil sie gleich sind den Ringräumen in der untersten Ordnung bei c d, und sich diese verhalten wie 1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 13, 14 u. s. w.

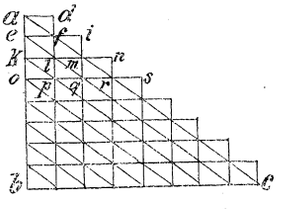


(Figur 23.)

Aber auch, wenn der Kegel gebildet wird von einem rechtwinkeligen Dreieck, dessen beide Spitzwinkel einander ungleich sind, findet dasselbe Verhältniß sowohl der Außen- und Innencylinderchen als der von den Dreieckchen gebildeten Ringräume statt. (S. Fig 24 a u. b.) Wenn nemlich der Winkel b a c größer oder kleiner als 45°, so erhält man nachdem man die Kathete a b in eine bestimmte Anzahl n gleicher Theile getheilt hat, ebenso viele gleiche Theile der andern Kathete b c, indem man aus jedem Theilungspunkt der ersten Kathete a b eine Parallele zieht mit der Hypotenuse a c. Zieht man dann noch aus jedem solchen Theilungspunkte der ersten Kathete a b eine Parallele mit der Grundlinie b c, ebenso aus jedem der erhaltenen Theilungspunkte auf b c eine Parallele



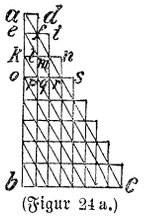
(Figur 24 a.)



(Figur 24 b.)

Hosted by Google

mit der Achse a b, so hat man sowohl alle gehörende Rechtecke, woraus die Außencylinderchen beschrieben werden, als auch statt der Quadratchen bei dem gleichschenkeligen Dreieck hier Rechteckchen und daraus die Dreieckchen, aus denen die Ringräume hervorgehen. Ist nun a e = h, aber e f = g, so ist Cylinderchen a e f d = $\pi . g.^2 h$, dann Cylinderchen e k m i = $\pi . g.^2 2^2 h$; Cyl. k o r n = $\pi . g.^2 3.^2 h$. Es verhalten sich also die Cylinderchen wieder wie 1, 4, 9, 16 und so fort. Ferner ist Kegelchen a e f =



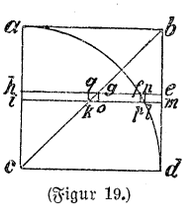
(Figur 24 a.)

$= \frac{\pi . g.^2 h}{3}$ gleich dem Ringraume aus e k l, dem aus k o p u. s. w., dann der Ringraum aus a d f gleich $\frac{\pi . g.^2 h}{3}.2$, ebenso Ringraum aus e f l und jeder andere aus einem gleichen Dreieckchen in gleich weitem Abstande von der Achse a b. Der Ringraum aus f l m ist gleich Keg. a k m — Keg. a e f — Cyl. k l f e =

$= \frac{\pi . g.^2 2.^2 h}{3} - \frac{\pi . g.^2 h}{3} - \pi . g.^2 h = \frac{\pi . g.^2 h}{3} (8 - 1 - 3) = \frac{\pi . g.^2 h}{3} . 4.$

So wird der Ringraum aus f m i gleich $\frac{\pi . g.^2 h}{3}.5$, der aus m q r gleich $\frac{\pi . g.^2 h}{3}.7$, der aus m n r gleich $\frac{\pi . g.^2 h}{3}.8$. Mithin verhalten sich die Räume aus den einzelnen Dreieckchen z. B. im Rechtecke k o r n wie 1, 2, 4, 5, 7, 8.

Wenn man nun (S. Fig. 19.) aus Quadrat a c d b, dem Quadranten a c d und dem Dreieck a b c den Cylinder, die Halbkugel und den Kegel sich gebildet hat, und durch zwei sehr nahe bei einander liegende mit dem Grundflächenkreis parallele Schnitte durch Cylinder, Halbkugel und Kegel das Scheibchen des Cylinders h i m e wie das der Halbkugel h i l f und des Kegels h i k g erhalten, wo die Scheibchen der Halbkugel wie des Kegels sehr nahe kommen, jedes seinem Außen- und Innencylinderchen, h i l f nahe kommend h i l n oder h i p f, und h i k g nahe kommend h i o g oder h i k q, so war also immer Cylinderchen h i m e = h i l n + h i k q, und Cyl. h i m e = h i p f + h i o g, folglich ist auch Cil. h i l n + h i k q = h i p f + h i o g und Cyl. h i l n — h i p f = h i o g — h i k q; mithin ringförmiger Raum gebildet aus l n f p gleich dem ringförmigen Raum gebildet aus k o g q. Mag man auch die Scheibchen in einer Höhe nehmen, wo man will, so ist immer der Unterschied des Außen- und Innencylinders der Halbkugel gleich dem Unterschied des Außen- und Innencylinders des Kegels, also auch der Unterschied aller Außen- und Innencylinderchen der Halbkugel gleich dem Unterschied aller Außen- und Innencylinderchen des Kegels, oder auch gleich $\pi . h.^3 n^2 = \pi . r.^2 h$.

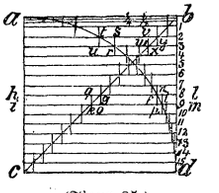


(Figur 19.)

Theilte man durch parallele Schnitte mit dem Grundflächenkreis Cylinder,

Hosted by Google

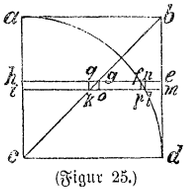
Halbkugel und Kegel in lauter solche Scheibchen gleicher Höhe, construirte auch die Außen= und Innencylinderchen der Halbkugel wie des Kegels, so müßten alle Unterschiede der Außen= und Innencylinderchen des Kegels aus Ringen bestehen, die durch Quadrate, alle Unterschiede der Außen= und Innencylinderchen der Halbkugel aber aus Ringen, die durch Rechtecke gebildet werden. (S. Fig. 25.) Denn da die Ringe gleiche Höhe oder Länge haben, so muß der von der Achse entferntere Ring eine kleinere Breite haben, als der mit ihm an Inhalt gleiche der Achse nähere Ring. Da aber die Ringe, die von der Hypotenuse des Dreiecks ausgebildet werden, immer aus einem vollständigen Quadrat hervorgehen, so können die mit ihnen an Inhalt gleichen, aber zur Achse theils näher theils ferner liegenden Ringe des Quadranten nur aus einem Rechtecke entstehen. Nun liegen unter 45^0 alle Ringe, die vom Quadranten her ausgegangen sind, weiter von der Achse als die Ringe der Hypotenuse, folglich müssen auch die Ringe des Quadrantin unter 45^0 eine kleinere Breite haben als Höhe, dagegen ober 45^0 sind die Ringe des Quadranten näher zur Achse als die der Hypotenuse; mithin erhalten dann die Ringe des Quadranten eine größere Breite als Höhe. Daher hat der unterste Ring des Quadranten die kleinste Breite, jeder folgende Ring eine immer größere und der oberste beim Höhepunkte der Halbkugel die größte Breite. Haben nun diese Ringe eine sehr kleine Höhe, ist also die Achse der Halbkugel wie der Quadrant in sehr viele Theile getheilt, so wird solch kleines Kreisstück ziemlich genau mit der Sehne zusammenfallen, welche als Diagonale das Rechteckchen in zwei gleiche Dreieckchen zerschneidet. Nun gehört jedes solches Rechteck wie p l n f in ein rechtwinkeliges Dreieck mit einem spitzen Winkel gleich ∠ p f l, aus welchem Dreieck ein Kegel beschrieben wird; ebenso Rechteckchen r s t u in ein rechtwinkeliges Dreieck mit einem spitzen Winkel gleich ∠ u t r, so daß immer der Ring beschrieben von f l n größeren Inhalts ist, (wenn nemlich f l die Sehne) als der Ring beschrieben von p f l, und zwar um ein Kegelchen, welches aus p f l beschrieben würde mit der Achse f p, also um $\frac{\pi . g.^2 h}{3}$; ebenso Ring aus t r s, wo t r Sehne, größeren Inhalts als Ring aus t u r, um ein Kegelchen aus t u r mit der Achse t u, um $\frac{\pi . \gamma.^2 h}{3}$; ebenso wie bei der Hypotenuse c b der Ring gebildet von g o k größeren Inhalts ist als der Ring gebildet nus q k g, um ein Kegelchen $\frac{\pi . h^3}{3}$. Daher ist auch der Ring aus f l n mehr als die Hälfte des Ringes aus p l n f, ebenso Ring aus g k o mehr als halber Ring aus q k o g, oder auch Ring aus y x w mehr als die Hälfte des Ringes aus v w x y, und Ring aus r s t mehr als halber Ring aus t u r s.



(Figur 25.)

Hosted by Google

Da das Cylinderscheibchen h i m e weniger dem Innencylinderchen des Kegels h i k q gleich dem Außencylinderchen der Halbkugel h i l n, so ist auch Cylinderscheibchen h i m e vermindert um die Summe aus Innencylinderchen des Kegels h i k g, und dem Ring aus f l n, wo f l Kreistheilchen, gleich dem Halbkugelscheibchen h i l f. (S. Fig. 25.) Ist es nun wahr, daß ein sehr kleines Kreisstückchen für eine gerade Linie mit der Sehne zusammenmenfallend und ganz gleich dieser gehalten werden darf, wie man ja gewöhnlich im Beweise des Archimedeischen Satzes dieses annimmt, so wäre, da dann Ring aus f n l, wo f l Kreisstückchen gleich gehalten der Sehne f l, größer als Ring aus q k g sein würde, immerhin Cylinderscheibchen h i m e vermindert um die Summe aus Innencylinderchen des Kegels h i k q und dem Ring aus q k g, oder Cylinderscheibchen h i m e vermindert um das Kegelscheibchen h i k g größer als das Halbkugelscheibchen h i l f. Da dieses allgemein von jedem Scheibchen des Cylinders, der Halbkugel und des Kegels gilt, so müßte auch die Summe aller Cylinderscheibchen vermindert um die Summe aller Kegelscheibchen größer als die Summe aller Halbkugelscheibchen, oder Cylinder vermindert um Kegel größer als die Halbkugel, $^2/_3$ Cylinder größer als die Halbkugel, daher $^2/_3$ Doppelcylinder größer als die Kugel sein, folglich die Kugel an Inhalt weniger betragen, als $^2/_3$ desjenigen Cylinders, dessen Grundflächenkreis der Aequator und dessen Höhe der Durchmesser derselben ist. Mithin müßte dann auch der Inhalt der Oberfläche nicht $4\,\pi\,r^2$ ausmachen, und der Archimedeische Satz würde unwahr, wenigstens entschieden ungenau sein.



(Figur 25.)

Die beiden Beweise, welche man gewöhnlich von dem archimedeischen Satze gibt, sind vorzüglich deßwegen ungenau und unvollständig, weil man im ersten Beweise die Oberfläche zu bestimmen pflegt nur durch eine von außen umgebende Fläche der Kegelzonen und im zweiten den Inhalt der Kugel durch Außencylinderchen, wobei man also immer ein kleines Mehr erhalten muß, und eine andere bestimmende Größe, die ein Weniger angibt, fehlt. Dadurch aber, daß wir die innern Flächen beschrieben, erlangten wir das genau bestimmende Maß von einem Außen und Innen, zwischen welchen die Halbkugelfläche selbst liegt Eben ein solch bestimmendes Maß wird uns für den Inhalt der Halbkugel durch die beschriebenen Außen- und Innencylinderchen. Denn da ihr Unterschied nach der von uns gemachten Entdeckung stets gleich ist demjenigen der Außen- und Innencylinderchen des Kegels, so ist, wenn wir die Summe aller Außencylinder des Kegels mit S und der Halbkugel mit Σ, aber die Summe aller Innencylinder des Kegels mit s, und die aller der Halbkugel mit σ bezeichnen, auch $S - s = \Sigma - \sigma$. Aber es war nach dem Früheren $S - s = \pi . h.^3 n^2 = \frac{\pi . h.^3 n.^3}{n} = \frac{3\,\pi . r^3}{3\,n} = \frac{3\ \text{Keg}}{n}$. Ist nun n unendlich groß,

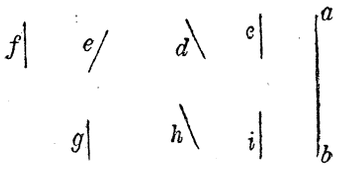
Hosted by Google

d. h. sind der Scheibchen unendlich viele, so ist der Unterschied der Außen- und Innencylinderchen gleich Null zu achten, oder $S - s = \Sigma - \sigma = o$, also ist dann auch $S = s$ und $\Sigma = \sigma$ zu setzen, und um so mehr alsdann für S der Kegel und für σ die Halbkugel, oder für s der Kegel und für Σ die Halbkugel selbst. Deßhalb muß die Halbkugel das Doppelte des Kegels sein, und Cylinder zur Halbkugel zum Kegel sich verhalten wie $3:2:1$, daher auch wenn Cylinder sowohl als Kegel denselben Grundflächenkreis, den Aequator, aber zur Höhe den Durchmesser der Kugel haben; Cylinder zur Kugel zum Kegel wie $3:2:1$.

Hosted by Google

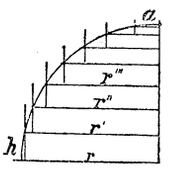
Andere Art, den Inhalt der Oberfläche einer Kugel zu finden.

Wenn zwei oder mehrere gleich große Linien sich in verschiedener Entfernung um ein und dieselbe Achse im Kreise herumbewegen, so wird stets diejenige die größte Ringfläche beschreiben, welche am weitesten von der Achse abliegt, und die jedesmal nähere zur Achse eine kleinere, mag auch die Lage der Linien sein, welche sie will, parallel mit der Achse, oder mit dem untern Theil näher zur Achse liegend als mit dem obern, oder umgekehrt mit dem obern Theil näher.



(Figur 26.)

Also wenn um dieselbe Achse a b sich im Kreise herumbewegen die unter sich gleichen Linien c, d, e, f, so muß die Fläche, die c beschreibt, kleiner sein als die von d beschriebene und diese kleiner als die von e, und endlich die von f beschriebene muß die größte sein. Aber auch wenn statt einer solchen Linie ein gleich großer Kreisbogen gesetzt wird, so muß die Fläche der am weitest abstehenden Linie g größer werden als die aus dem der Achse näheren Kreisbogen h erhaltene, so wie diese größer als die von der noch näheren Linie i beschriebene. Theilte man nun einen Quadranten in eine beliebige Anzahl n gleicher Theile, zieht durch jeden Theilungspunkt eine Parallele mit dem einen Halbmesser zum andern hin, errichtet auf jeder Parallele an ihrem Endpunkt, wo sie mit dem Quadranten zusammenkommt, eine senkrechte h gleich $^1/_n \times {}^1/_2 \pi.r$, sowohl auf der einen Seite aufwärts wie auf der andern abwärts, nur daß die erste auf dem Halbmesser aufwärts stehende senkrechte keine abwärts gehende bei sich hat (S. Fig. 27), so daß die Zahl der aufwärts stehenden senkrechten n ist, die der abwärts gehenden (n—1); so ist also die beschriebene Fläche von allen aufwärts stehenden senkrechten $2\pi.h\,(r+r'+r''+r'''+$ &c.),



(Figur 27.)

woselbst r den Halbmesser bezeichnet, aber r', r'', r''' und so fort die darauf folgenden parallel gezogenen Linien. Es sind diese aber nun jedesmal die Cosinus

Hosted by Google

zu den anliegenden Bogen. Da nun jedes Bogenstück a=h, so ist die Summe aller Flächen von den aufwärts stehenden senkrechten, d. i. die Summe der Seitenflächen der äußern Cylinder auch gleich $2\pi.h(\cos.0^0+\cos.a+\cos.2a+\cos.3a+\ldots.+\cos(n-1)a=2\pi.h.\frac{\cos\frac{n-1}{2}a.\sin\frac{n}{2}a}{\sin{}^1/_2 a}$. Ebenso wird die Summe aller Seitenflächen der innern Cylinder, deren Höhe abwärts steht, $2\pi.h(r'+r''+r'''+$ ꝛc.), oder $2\pi.h(\cos.a+\cos.2a+\cos.3a+\ldots.+\cos(n-1)a$. Nun muß die Gesammtseitenfläche aller äußern Cylinder um die aus dem Quadranten gebildete Halbkugel größer, und die Gesammtseitenfläche aller innern Cylinder kleiner sein als die Fläche der Halbkugel. Hat man den Quadranten in zwölf gleiche Theile getheilt, so wird die Gesammtseitenfläche aller äußern Cylinder: $2\pi h(\cos.0^0+\cos.7\,{}^1/_2{}^0+\cos.15^0+\cos.22\,{}^1/_2{}^0+\cos.30^0+\cos.37\,{}^1/_2{}^0+\cos.45^0+\cos.52\,{}^1/_2{}^0+\cos.60^0+\cos.67\,{}^1/_2{}^0+\cos.75^0+\cos.82\,{}^1/_2{}^0)=2\pi.h(1+0{,}9914448+0{,}9659257+0{,}9238793+0{,}8660254+0{,}7933534+0{,}7071067+0{,}6087614+0{,}5+0{,}3826534+0{,}2588190+0{,}1305262)=2\pi.h\times 8{,}1285253=\frac{2\pi.{}^1/_2\pi}{12}\times 8{,}1285253\frac{\pi.^2 8{,}1285253}{12}=\pi.^2 0{,}6773770=$ $=9{,}8696044\times 0{,}6773770=6{,}685$. Ebenso die Gesammtseitenfläche der innern Cylinder $\frac{\pi.^2 7{,}1285253}{12}=9{,}8696044\times 0{,}5107104=5{,}0405$. Folglich muß die Oberfläche der Halbkugel kleiner sein als 6,685 und größer als 5,0405.

Die Summe aller Cosinus der einzelnen Grade von 0^0 bis 89^0 ist 57,794, mithin die Summe aller Seitenflächen der 90 äußern Cylinder $2\pi.h\times 57{,}794=$ $=\frac{\pi.^2 57{,}794}{90}=9{,}8696044\times 0{,}6421=6{,}337$; die Summe der Seitenflächen der innern Cylinder $2\pi.h\times 56{,}794=\frac{\pi.^2 56{,}794}{90}=9{,}8696044\times 0{,}63104=6{,}228$. Da die Summe aller Cosinus, die von 0^0 bis $89\,{}^1/_2{}^0$ immer im Unterschied eines halben Grades genommen werden, nemlich $\cos.0^0+\cos.{}^1/_2{}^0+\cos.1^0+\cos 1\,{}^1/_2{}^0$ u. s. w. bis $+\cos.89\,{}^1/_2{}^0$ gleich ist 115,0906, so muß die Gesammtseitenfläche aller umgebenden äußern Cylinder sein $\frac{\pi.^2 115{,}0906}{180}=9{,}8696044\times 0{,}63938=$ $=6{,}310$; ebenso die Seitenflächen aller innern Cylinder $\frac{\pi.^2 114{,}0906}{180}=$ $=9{,}8696044.0{,}6338=6{,}255$. Mithin ist die Oberfläche der Halbkugel kleiner als 6,31 und größer als 6,25.

Endlich wenn man die Cosinus von 0^0 bis $89^0 30'$ immer nach je $10'$ zusammen addirt: $\cos.0^0+\cos.10'+\cos.20'+\cos.30'+$ ꝛc., so erhält man

Hosted by Google

344,2753. Mithin die Seitenfläche der äußern Cylinder gleich $\frac{\pi^2 . 344{,}275}{540} =$ $= 9{,}869604 \times 0{,}63754 = 6{,}292$, und die Seitenflächen der innern Cylinder $\frac{\pi.^2 343{,}275}{540} = 9{,}869604 \times 0{,}635693 = 6{,}274$. Folglich muß auch die Oberfläche der Halbkugel $\angle 6{,}29$ und $\rangle 6{,}27$ sein.

Mithin ist die Oberfläche der Halbkugel größer als $^1/_2\, \pi.^2 r^2$, oder größer als $0{,}50\, \pi.^2 r^2$, da ja auch größer als $0{,}63\, \pi.^2 r^2$, aber kleiner als $0{,}64\, \pi.^2 r^2$, und man wird für dieselbe, wenn man die Rechnung weiter fortsetzen wollte, $6{,}28\ldots$ erhalten, also auch wohl $2\, \pi. r^2$, so wie der Archimedeische Satz angibt.

Hosted by Google

III.

Trigonometrische Formeln

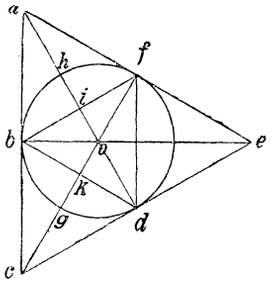
nebst einigen daraus hergeleiteten Lehrsätzen.

Aus dem Jahre 1841.

Hosted by Google

Hosted by Google

Fig. 1.



Diese Figur besteht aus 10 Linien, einer dem Kreise, 3 des eingeschriebenen, 3 des umgeschriebenen Polygons, hier des Dreiecks, 3 aus den Spitzen des umgeschriebenen Dreiecks durch den Mittelpunkt auf die gegenüberliegende Seite gezogenen Linien. Dadurch entstehen mehrere Abschnitte, davon kommen solche, wie oe, od nicht in Betracht, als gleichgeltend mit ao und bo. Wir berücksichtigen vorzüglich folgende 33 Abschnitte: 1) bf, 2) bi, 3) bo, 4) io, 5) ao, 6) ai, 7) ah, 8) ai, 9) bhf, 10) ac, 11) ab, 12) $2\pi r$, 13) bf + fd + db, 14) ac + ce + ea, 15) bo + of + fb, 16) bi + io + ob, 17) ac + co + oa, 18) bo + oc + cb, 19) ab + bf + fa, 20) ab + bi + ia, 21) bhf + fo + ob, 22) bhf + fb, 23) ab + bhf + fa, 24) ab + bo + of + fa, 25) $\triangle$ bof, 26) $\triangle$ bfd, 27) $\triangle$ aco. Diesem gleich ist $\square$ bafo, 28) $\triangle$ ace, 29) bofh, 30) πr^2, 31) bhfi, 32) bhfa, 33) $\triangle$ baf. Wenn nun außer der Anzahl der Seiten der Polygone eins von diesen Stücken gegeben ist, so lassen sich die andern daraus herleiten. Es ist ein Centriwinkel gleich $^4/_n$ R, der halbe $^2/_n$ R, und es gibt also $33^2 = 1089$ Ausdrücke für die Werthe dieser 33 Stücke, oder wenn man die identischen Gleichungen, wie bf = bf abrechnet, $1089 - 33 = 1056$.

Die Formeln wurden zuerst im Jahre 1841 aufgestellt, und es kamen dabei von den trigonometrischen Linien bloß die Sinus und die Cosinus in Anwendung. Durch Hinzuziehung der Tangenten und der Cotangenten sind sie also 1882 umgeändert und zum Theil in kürzeren Ausdrücken wiedergegeben.

Hosted by Google

1) $bf = bf$ 2) $bi = \frac{bf}{2}$ 3) $bo = \frac{bf}{2\sin {}^{2}/_{n}R}$ 4) $io = \frac{bf}{2\tan {}^{2}/_{n}R}$

5) $ao = \frac{bf}{\sin {}^{4}/_{n}R}$ 6) $ai = \frac{bf.\tan {}^{2}/_{n}R}{2}$ 7) $ah = bf\ \frac{(1-\cos {}^{2}/_{n}R)}{\sin {}^{4}/_{n}R}$

8) $hi = bf\frac{(1-\cos {}^{2}/_{n}R)}{2\sin {}^{2}/_{n}R}$ 9) $bhf = \frac{bf.\pi}{n.\sin {}^{2}/_{n}R}$ 10) $ac = \frac{bf}{\cos {}^{2}/_{n}R}$

11) $ab = \frac{bf}{2\cos {}^{2}/_{n}R}$ 12) $2\pi r = \frac{bf.\pi}{\sin {}^{2}/_{n}R}$ 13) $bf + fd + db = bf.n$

14) $ac + ce + ea = \frac{bf.n}{\cos {}^{2}/_{n}R}$ 15) $bo + of + fb = bf\frac{(1+\sin {}^{2}/_{n}R)}{\sin {}^{2}/_{n}R}$

16) $bi + io + ob = bf\frac{(1+\sin {}^{2}/_{n}R+\cos {}^{2}/_{n}R)}{2\sin {}^{2}/_{n}R}$

17) $ac + co + oa = bf\frac{(1+\sin {}^{2}/_{n}R)}{\sin {}^{2}/_{n}R.\cos {}^{2}/_{n}R}$

18) $bo + oc + cb = bf\frac{(1+\sin {}^{2}/_{n}R+\cos {}^{2}/_{n}R)}{\sin {}^{4}/_{n}R}$

19) $ab + bf + fa = bf\frac{(1+\cos {}^{2}/_{n}R)}{\cos {}^{2}/_{n}R}$

20) $ab + bi + ia = bf\frac{(1+\sin {}^{2}/_{n}R+\cos {}^{2}/_{n}R)}{2\cos {}^{2}/_{n}R}$

21) $bhf + fo + ob = bf\frac{(n+\pi)}{n.\sin {}^{2}/_{n}R}$ 22) $bhf + fb = bf\frac{(n.\sin {}^{2}/_{n}R+\pi)}{n.\sin {}^{2}/_{n}R}$

23) $ab + bhf + fa = bf\frac{(\pi+n.\tan {}^{2}/_{n}R)}{n.\sin {}^{2}/_{h}R}$

24) $ab + bo + of + fa = bf\frac{(\pi+\tan {}^{2}/_{n}R)}{\sin {}^{2}/_{n}R}$

25) $\triangle bof = \overset{-2}{bf}.\frac{\cot {}^{2}/_{n}R}{4}$ 26) $\triangle bfd = \overset{-2}{bf}.\frac{n.\cot {}^{2}/_{n}R}{4}$

27) $\triangle aco = \frac{\overset{-2}{bf}}{2\sin {}^{4}/_{n}R}$ 28) $\triangle ace = \frac{\overset{-2}{bf}.n}{2\sin {}^{4}/_{n}R}$

29) $bofh = \frac{\overset{-2}{bf}.\pi}{4n.\sin {}^{2}/_{n}\overline{R}^{2}}$ 30) $\pi r^2 = \frac{\overset{-2}{bf}.\pi}{4\sin {}^{2}/_{n}\overline{R}^{2}}$

31) $bhfi = \overset{-2}{bf}\frac{(\pi-n.\sin {}^{2}/_{n}R.\cos {}^{2}/_{n}R)}{4n.\sin {}^{2}/_{n}\overline{R}^{2}}$

32) $bhfa = \overset{-2}{bf}\frac{(n.\tan {}^{2}/_{n}R-\pi)}{4n.\sin {}^{2}/_{n}\overline{R}^{2}}$ 33) $\triangle baf = \frac{\overset{-2}{bf}.\tan {}^{2}/_{n}R}{4}$

Hosted by Google

34) $bf = bi.2$ **35)** $bi = bi$ **36)** $bo = \frac{bi}{\sin {}^{2}/_{n}\,R}$

37) $io = bi.\cot {}^{2}/_{n}\,R$ **38)** $ao = \frac{bi}{\sin {}^{2}/_{n}\,R \,.\, \cos {}^{2}/_{n}\,R}$

39) $ai = bi.\tan {}^{2}/_{n}\,R$ **40)** $ah = \frac{bi(1 - \cos {}^{2}/_{n}\,R)}{\sin {}^{2}/_{n}\,R \,.\, \cos {}^{2}/_{n}\,R}$

41) $hi = \frac{bi(1 - \cos {}^{2}/_{n}\,R)}{\sin {}^{2}/_{n}\,R}$ **42)** $bhf = \frac{bi.2\pi}{n \,.\, \sin {}^{2}/_{n}\,R}$

43) $ac = \frac{bi.2}{\cos {}^{2}/_{n}\,R}$ **44)** $ab = \frac{bi}{\cos {}^{2}/_{n}\,R}$ **45)** $2\pi r = \frac{bi.2\pi}{\sin {}^{2}/_{n}\,R}$

46) $bf + fd + db = bi.2n$ **47)** $ac + ce + ea = \frac{bi.2n}{\cos {}^{2}/_{n}\,R}$

48) $bo + of + fb = = \frac{bi.2(1 + \sin {}^{2}/_{n}\,R)}{\sin {}^{2}/_{n}\,R}$

49) $bi + io + ob = \frac{bi(1 + \sin {}^{2}/_{n}\,R + \cos {}^{2}/_{n}\,R)}{\sin {}^{2}/_{n}\,R}$

50) $ac + co + oa = \frac{bi.2(1 + \sin {}^{2}/_{n}\,R)}{\sin {}^{2}/_{n}\,R \,.\, \cos {}^{2}/_{n}\,R}$

51) $bo + oc + cb = \frac{bi.2(1 + \sin {}^{2}/_{n}\,R + \cos {}^{2}/_{n}\,R)}{\sin {}^{4}/_{n}\,R}$

52) $ab + bf + fa = \frac{bi.2(1 + \cos {}^{2}/_{n}\,R)}{\cos {}^{2}/_{n}\,R}$

53) $ab + bi + ia = \frac{bi(1 + \sin {}^{2}/_{n}\,R + \cos {}^{2}/_{n}\,R)}{\cos {}^{2}/_{n}\,R}$

54) $bhf + fo + ob = \frac{bi.2(n + \pi)}{n \,.\, \sin {}^{2}/_{n}\,R}$

55) $bhf + fb = \frac{bi.2(n \,.\, \sin {}^{2}/_{n}\,R + \pi)}{n \,.\, \sin {}^{2}/_{n}\,R}$

56) $ab + bhf + fa = \frac{bi.2(\pi + n \,,\, \tan {}^{2}/_{n}\,R)}{n \,.\, \sin {}^{2}/_{n}\,R}$

57) $ab + bo + of + fa = \frac{bi.2(1 + \tan {}^{2}/_{n}\,R)}{\sin {}^{2}/_{n}\,R}$

58) $\triangle bof = \frac{-2}{bi}.\cot {}^{2}/_{h}\,R$ **59)** $\triangle bfd = \frac{-2}{bi}.n \cot {}^{2}/_{n}\,R$

60) $\triangle aco = \frac{\frac{-2}{bi}}{\sin {}^{2}/_{n}\,R \,.\, \cos {}^{2}/_{n}\,R}$ **61)** $\triangle ace = \frac{\frac{2}{bi} - n}{\sin {}^{2}/_{n}\,R \,.\, \cos {}^{2}/_{n}\,R}$

62) $bofh = \frac{\frac{-2}{bi}.\pi}{n \,.\, \sin {}^{2}/_{n}\,\overline{R}^{2}}$ **63)** $\pi r^2 = \frac{\frac{-2}{bi}.\pi}{\sin {}^{2}/_{n}\,\overline{R}^{2}}$

Hosted by Google

64) $bhfi = \dfrac{\overline{bi}^{2}(\pi - n.\sin {}^{2}/_{n}R.\cos {}^{2}/_{n}R)}{n.\sin {}^{2}/_{n}R^{2}}$

65) $bhfa = \dfrac{\overline{bi}^{2}(n.\tan {}^{2}/_{n}R - \pi)}{n.\sin {}^{2}/_{n}R^{2}}$ **66)** $\triangle baf = \overline{bi}^{2}.\tan {}^{2}/_{n}R$

---

67) $bf = bo.2\sin {}^{2}/_{n}R$ **68)** $bi = bo.\sin {}^{2}/_{n}R$ **69)** $bo = bo$

70) $io = bo.\cos {}^{2}/_{n}R$ **71)** $ao = \dfrac{bo}{\cos {}^{2}/_{n}R}$

72) $ai = bo(\sin {}^{2}/_{n}R.\tan {}^{2}/_{n}R)$ **73)** $ah = bo\dfrac{(1 - \cos {}^{2}/_{n}R)}{\cos {}^{2}/_{n}R}$

74) $hi = bo\ (1 - \cos {}^{2}/_{n}R)$ **75)** $bhf = \dfrac{bo.2\pi}{n}$

76) $ac = bo.2\tan {}^{2}/_{n}R$ **77)** $ab = bo.\tan {}^{2}/_{n}R$ **78)** $2\pi r = bo.2\pi$

79) $bf + fd + db = bo.2n\sin {}^{2}/_{n}R$ **80)** $ac + ce + ea = bo.2n.\tan {}^{2}/_{n}R$

81) $bo + of + fb = bo.2(1 + \sin {}^{2}/_{n}R)$

82) $bi + io + ob = bo(1 + \sin {}^{2}/_{n}R + \cos {}^{2}/_{n}R)$

83) $ac + co + oa = \dfrac{bo.2(1 + \sin {}^{2}/_{n}R)}{\cos {}^{2}/_{n}R}$

84) $bo + oc + cb = \dfrac{bo\ (1 + \sin {}^{2}/_{n}R + \cos {}^{2}/_{n}R)}{\cos {}^{2}/_{n}R}$

85) $ab + bf + fa = bo.2\tan {}^{2}/_{n}R(1 + \cos {}^{2}/_{n}R)$

86) $ab + bi + ia = bo.\tan {}^{2}/_{n}R(1 + \sin {}^{2}/_{n}R + \cos {}^{2}/_{n}R)$

87) $bhf + fo + ob = \dfrac{bo.2(\pi + n)}{n}$

88) $bhf + fb = \dfrac{bo.2(\pi + n.\sin {}^{2}/_{n}R)}{n}$

89) $ab + bhf + fa = \dfrac{bo.2(n.\tan {}^{2}{}_{n}R + \pi)}{n}$

90) $ab + bo + of + fa = bo.2(1 + \tan {}^{2}/_{n}R)$

91) $\triangle bof = \overline{bo}^{2}.\sin {}^{2}/_{n}R.\cos {}^{2}/_{n}R$ **92)** $\triangle bfd = \overline{bo}^{2}.n.\sin {}^{2}/_{n}R.\cos {}^{2}/_{n}R$

93) $\triangle aco = \overline{bo}^{2}.\tan {}^{2}/_{n}R$ **94)** $\triangle ace = \overline{bo}^{2}.n.\tan {}^{2}/_{n}R$

95) $bofh = \dfrac{\overline{bo}^{2}.\pi}{n}$ **96)** $\pi r^{2} = \overline{bo}^{2}.\pi$

Hosted by Google

97) $\mathrm{bhfi} = \dfrac{\overline{\mathrm{bo}}^{2}(\pi - \mathrm{n}\,.\,\sin {}^{2}/_{\mathrm{n}}\mathrm{R}\,.\,\cos {}^{2}/_{\mathrm{n}}\mathrm{R})}{\mathrm{n}}$

98) $\mathrm{bhfa} = \dfrac{\overline{\mathrm{bo}}^{2}(\mathrm{n}\,.\,\tan {}^{2}/_{\mathrm{n}}\mathrm{R} - \pi)}{\mathrm{n}}$ 99) $\triangle \mathrm{baf} = \overline{\mathrm{bo}}^{2}\,.\,\overline{\sin {}^{2}/_{\mathrm{n}}\mathrm{R}}^{2}\,.\,\tan {}^{2}/_{\mathrm{n}}\mathrm{R}$

---

100) $\mathrm{bf} = \mathrm{io}\,.\,2\tan {}^{2}/_{\mathrm{n}}\mathrm{R}$ 101) $\mathrm{bi} = \mathrm{io}\,.\,\tan {}^{2}/_{\mathrm{n}}\mathrm{R}$

102) $\mathrm{bo} = \dfrac{\mathrm{io}}{\cos {}^{2}/_{\mathrm{n}}}$ 103) $\mathrm{io} = \mathrm{io}$ 104) $\mathrm{ao} = \dfrac{\mathrm{io}}{\overline{\cos {}^{2}/_{\mathrm{n}}\mathrm{R}}^{2}}$

105) $\mathrm{ai} = \mathrm{io}\,.\,\overline{\tan {}^{2}/_{\mathrm{n}}\mathrm{R}}^{2}$ 106) $\mathrm{ah} = \dfrac{\mathrm{io}(1 - \cos {}^{2}/_{\mathrm{n}}\mathrm{R})}{\overline{\cos {}^{2}/_{\mathrm{n}}\mathrm{R}}^{2}}$

107) $\mathrm{hi} = \dfrac{\mathrm{io}(1 - \cos {}^{2}/_{\mathrm{n}}\mathrm{R})}{\cos {}^{2}/_{\mathrm{n}}\mathrm{R}}$ 108) $\mathrm{bhf} = \dfrac{\mathrm{io}\,.\,2\pi}{\mathrm{n}\,.\cos {}^{2}/_{\mathrm{n}}\mathrm{R}}$

109) $\mathrm{ac} = \dfrac{\mathrm{io}\,.\,2\,.\tan {}^{2}/_{\mathrm{n}}\mathrm{R}}{\overline{\cos {}^{2}/_{\mathrm{n}}\mathrm{R}}^{2}}$ 110) $\mathrm{ab} = \dfrac{\mathrm{io}\,.\tan {}^{2}/_{\mathrm{n}}\mathrm{R}}{\overline{\cos {}^{2}/_{\mathrm{n}}\mathrm{R}}^{2}}$

111) $2\pi\mathrm{r} = \dfrac{\mathrm{io}\,.\,2\pi}{\cos {}^{2}/_{\mathrm{n}}\mathrm{R}}$ 112) $\mathrm{bf} + \mathrm{fd} + \mathrm{db} = \mathrm{io}\,.\,2\,\mathrm{n}\tan {}^{2}/_{\mathrm{n}}\mathrm{R}$

113) $\mathrm{ac} + \mathrm{ce} + \mathrm{ea} = \dfrac{\mathrm{io}\,.\,2\,\mathrm{n}\tan {}^{2}/_{\mathrm{n}}\mathrm{R}}{\cos {}^{2}/_{\mathrm{n}}\mathrm{R}}$

114) $\mathrm{bo} + \mathrm{of} + \mathrm{fb} = \dfrac{\mathrm{io}\,.\,2(1 + \sin {}^{2}/_{\mathrm{n}}\mathrm{R})}{\cos {}^{2}/_{\mathrm{n}}\mathrm{r}}$

115) $\mathrm{bi} + \mathrm{io} + \mathrm{ob} = \dfrac{\mathrm{io}(1 + \sin {}^{2}/_{\mathrm{n}}\mathrm{R} + \cos {}^{2}/_{\mathrm{n}}\mathrm{R})}{\cos {}^{2}/_{\mathrm{n}}\mathrm{R}}$

116) $\mathrm{ac} + \mathrm{co} + \mathrm{ca} = \dfrac{\mathrm{io}\,.\,2(1 + \sin {}^{2}/_{\mathrm{n}}\mathrm{R}}{\overline{\cos {}^{2}/_{\mathrm{n}}\mathrm{R}}^{2}}$

117) $\mathrm{bo} + \mathrm{oc} + \mathrm{cb} = \dfrac{\mathrm{io}(1 + \sin {}^{2}/_{\mathrm{n}}\mathrm{R} + \cos {}^{2}/_{\mathrm{n}}\mathrm{R})}{\overline{\cos {}^{2}/_{\mathrm{n}}\mathrm{R}}^{2}}$

118) $\mathrm{ab} + \mathrm{bf} + \mathrm{fa} = \dfrac{\mathrm{io}\,.\,2\tan {}^{2}/_{\mathrm{n}}\mathrm{R}\,(1 + \cos {}^{2}/_{\mathrm{n}}\mathrm{R})}{\cos {}^{2}/_{\mathrm{n}}\mathrm{R}}$

119) $\mathrm{ab} + \mathrm{bi} + \mathrm{ia} = \dfrac{\mathrm{io}.\tan {}^{2}/_{\mathrm{n}}\mathrm{R}(1 + \sin {}^{2}/_{\mathrm{n}}\mathrm{R} + \cos {}^{2}/_{\mathrm{n}}\mathrm{R})}{\cos {}^{2}/_{\mathrm{n}}\mathrm{R}}$

120) $\mathrm{bhf} + \mathrm{fo} + \mathrm{ob} = \dfrac{\mathrm{io}\,.\,2(\mathrm{n} + \pi)}{\mathrm{n}\,.\cos {}^{2}/_{\mathrm{n}}\mathrm{R}}$

121) $\mathrm{bhf} + \mathrm{fb} = \dfrac{\mathrm{io}\,.\,2(\pi + \mathrm{n}\,.\sin {}^{2}/_{\mathrm{n}}\mathrm{R})}{\mathrm{n}\,.\cos {}^{2}/_{\mathrm{n}}\mathrm{R}}$

Hosted by Google

122) $ab + bhf + fa = \dfrac{io.2(\pi + n.\tan {}^{2}/_{n}\,R)}{n.\cos {}^{2}/_{n}\,R}$

123) $ab + bo + of + fa = \dfrac{io.2(1 + \tan {}^{2}/_{n}\,R)}{\cos {}^{2}/_{n}\,R}$

124) $\triangle bof = \overline{io}^{2}.\tan {}^{2}/_{n}\,R$

125) $\triangle bfd = \overline{io}^{2}.n.\tan {}^{2}/_{n}\,R$

126) $\triangle aco = \dfrac{\overline{io}^{2}.\tan {}^{2}/_{n}\,R}{\cos {}^{2}/_{n}\,\overline{R}^{2}}$

127) $\triangle ace = \dfrac{\overline{io}^{2}.n.\tan {}^{2}/_{n}\,R}{\cos {}^{2}/_{n}\,\overline{R}^{2}}$

128) $bofh = \dfrac{\overline{io}^{2}.\pi}{n.\cos {}^{2}/_{n}\,\overline{R}^{2}}$

129) $\pi r^{2} = \dfrac{\overline{io}^{2}.\pi}{\cos {}^{2}/_{n}\,\overline{R}^{2}}$

130) $bhfi = \dfrac{\overline{io}^{2}(\pi - n.\sin {}^{2}/_{n}\,R.\cos {}^{2}/_{n}\,R)}{n.\cos {}^{2}/_{n}\,\overline{R}^{2}}$

131) $bhfa = \dfrac{\overline{io}^{2}(n.\tan {}^{2}/_{n}\,R - \pi)}{n.\cos {}^{2}/_{n}\,\overline{R}^{2}}$

132) $\triangle baf = \overline{io}^{2}.\tan {}^{2}/_{n}\,\overline{R}^{3}$

---

133) $bf = ao.\sin {}^{4}/_{n}\,R$

134) $bi = ao.\sin {}^{2}/_{n}\,R.\cos {}^{2}/_{n}\,R$

135) $bo = ao.\cos {}^{2}/_{n}\,R$

136) $io = ao.\cos {}^{2}/_{n}\,\overline{R}^{2}$

137) $ao = ao$

138) $ai = ao.\sin {}^{2}/_{n}\,\overline{R}^{2}$

139) $ah = ao(1 - \cos {}^{2}/_{n}\,R)$

140) $hi = ao.\cos {}^{2}/_{n}\,R(1 - \cos {}^{2}/_{n}\,R)$

141) $bhf = \dfrac{ao.2\pi.\cos {}^{2}/_{n}\,R}{n}$

142) $ac = ao.2\sin {}^{2}/_{n}\,R$

143) $ab = ao.\sin {}^{2}/_{n}\,R$

144) $2\pi r = ao.2\pi.\cos {}^{2}/_{n}\,R$

145) $bf + fd + db = ao.n.\sin {}^{4}/_{n}\,R$

146) $ac + ce + ea = ao.2n\sin {}^{2}/_{n}\,R$

147) $bo + of = fb = ao.2\cos {}^{2}/_{n}\,R(1 + \sin {}^{2}/_{n}\,R)$

148) $bi + io + ob = ao.\cos {}^{2}/_{n}\,R(1 + \sin {}^{2}/_{n}\,R + \cos {}^{2}/_{n}\,R)$

149) $ac + co + oa = ao.2(1 + \sin {}^{2}/_{n}\,R)$

150) $bo + oc + cb = ao(1 + \sin {}^{2}/_{n}\,R + \cos {}^{2}/_{n}\,R)$

151) $ab + bf + fa = ao.2\sin {}^{2}/_{n}\,R(1 + \cos {}^{2}/_{n}\,R)$

152) $ab + bi + ia = ao.\sin {}^{2}/_{n}\,R(1 + \sin {}^{2}/_{n}\,R + \cos {}^{2}/_{n}\,R)$

153) $bhf + fo + ob = \dfrac{ao.2\cos {}^{2}/_{n}\,R(\pi + n)}{n}$

Hosted by Google

154) $bhf + fb = \dfrac{ao.2\cos^{2}/_{n}R(\pi + n.\sin^{2}/_{n}R)}{n}$

155) $ab + bhf + fa = \dfrac{ao.2(n.\sin^{2}/_{n}R + \pi.\cos^{2}/_{n}R)}{n}$

156) $ab + bo + of + fa = ao.2(\sin^{2}/_{n}R + \cos^{2}/_{n}R)$

157) $\triangle bof = \overline{ao}^{2}.\sin^{2}/_{n}R.\overline{\cos^{2}/_{n}R}^{3}$

158) $\triangle bfd = \overline{ao}^{2}.n.\sin^{2}/_{n}R.\overline{\cos^{2}/_{n}R}^{3}$

159) $\triangle aco = \overline{ao}^{2}.\sin^{2}/_{n}R.\cos^{2}/_{n}R$

160) $\triangle ace = \overline{ao}^{2}.n.\sin^{2}/_{n}R.\cos^{2}/_{n}R$

161) $bofh = \dfrac{\overline{ao}^{2}.\pi.\overline{\cos^{2}/_{n}R}^{2}}{n}$ **162)** $\pi r^{2} = \overline{ao}^{2}.\pi.\overline{\cos^{2}/_{n}R}^{2}$

163) $bhfi = \overline{ao}^{2}.\dfrac{\overline{\cos^{2}/_{n}R}^{2}(\pi - n.\sin^{2}/_{n}R\cos^{2}/_{n}R)}{n}$

164) $bhfa = \dfrac{\overline{ao}^{2}(n.\sin^{4}/_{n}R - 2\pi.\overline{\cos^{2}/_{n}R}^{2})}{2n}$

165) $\triangle baf = \overline{ao}^{2}.\sin^{2}/_{n}R.\overline{\cos^{2}/_{n}R}^{3}$

---

166) $bf = ai.2\cot^{2}/_{n}R$ **167)** $bi = ai.\cot^{2}/_{n}R$

168) $bo = ai.\dfrac{\cot^{2}/_{n}R}{\sin^{2}/_{n}R}$ **169)** $io = ai.\overline{\cot^{2}/_{n}R}^{2}$ **170)** $ao = \dfrac{ai}{\overline{\sin^{2}/_{n}R}^{2}}$

171) $ai = ai$ **172)** $ah = ai\dfrac{(1 - \cos^{2}/_{n}R)}{\overline{\sin^{2}/_{n}R}^{2}}$

173) $hi = ai.\dfrac{\cot^{2}/_{n}R(1 - \cos^{2}/_{n}R)}{\sin^{2}/_{n}R}$ **174)** $bhf = ai.\dfrac{2\pi.\cot^{2}/_{n}R}{n.\sin^{2}/_{n}R}$

175) $ac = \dfrac{ai.2}{\sin^{2}/_{n}R}$ **176)** $ab = \dfrac{ai}{\sin^{2}/_{n}R}$

177) $2\pi r = ai.\dfrac{2\pi.\cot^{2}/_{n}R}{\sin^{2}/_{n}R}$ **178)** $bf + fd + db = ai.2n.\cot^{2}/_{n}R$

179) $ac + ce + ea = \dfrac{ai.2n}{\sin^{2}/_{n}R}$

180) $bo + of + fb = ai.\dfrac{2(1 + \sin^{2}/_{n}R)}{\sin^{2}/_{n}R.\tan^{2}/_{n}R}$

Hosted by Google

181) $bi + io + ob = ai \dfrac{(1 + \sin {}^2/_n R + \cos {}^2/_n R)}{\sin {}^2/_n R \,.\, \tan {}^2/_n R}$

182) $ac + co + oa = ai. \dfrac{2(1 + \sin {}^2/_n R)}{\sin^{-2} {}^2/_n R}$

183) $bo + oc + cb = ai \dfrac{(1 + \sin {}^2/_n R + \cos {}^2/_n R)}{\sin^{-2} {}^2/_n R}$

184) $ab + bf + fa = ai. \dfrac{2(1 + \cos {}^2/_n R)}{\sin^{-2} {}^2/_n R}$

185) $ab + bi + ia = ai \dfrac{(1 + \sin {}^2/_n R + \cos {}^2/_n R)}{\sin {}^2/_n R}$

186) $bhf + fo + ob = ai. \dfrac{2 \cot {}^2/_n R (\pi + n)}{n \,.\, \sin {}^2/_n R}$

187) $bhf + fb = ai. \dfrac{2 \cot {}^2/_n R (\pi + n \,.\, \sin {}^2/_n R)}{n \,.\, \sin {}^2/_n R}$

188) $ab + bhf + fa = ai. \dfrac{2(n + \pi \,.\, \cot {}^2/_n R)}{n \,.\, \sin {}^2/_n R}$

189) $ab + bo + of + fa = ai. \dfrac{2(1 + \cot {}^2/_n R)}{\sin {}^2/_n R}$

190) $\triangle bof = \overset{-2}{ai} \,.\, \cot {}^2/_n \overset{-3}{R}$

191) $\triangle bfd = \overset{-2}{ai} \,.\, n \,.\, \cot {}^2/_n \overset{-3}{R}$

192) $\triangle aco = \overset{-2}{ai}. \dfrac{\cot {}^2/_n R}{\sin^{-2} {}^2/_n R}$

193) $\triangle ace = \overset{-2}{ai}. \dfrac{n \,.\, \cot {}^2/_n R}{\sin^{-2} {}^2/_n R}$

194) $bofh = \overset{-2}{ai}. \dfrac{\pi \,.\, \cot^{-2} {}^2/_n R}{n \,.\, \sin^{-2} {}^2/_n R}$

195) $\pi r^2 = \overset{-2}{ai}. \dfrac{\pi \,.\, \cot^{-2} {}^2/_n R}{\sin^{-2} {}^2/_n R}$

196) $bhfi = \overset{-2}{ai}. \dfrac{(\pi - n \,.\, \sin {}^2/_n R \,.\, \cos {}^2/_n R)}{n \,.\, \sin^{-2} {}^2/_n R \,.\, \tan^{-2} {}^2/_n R}$

197) $bhfa = \overset{-2}{ai} \dfrac{(n - \pi \,.\, \cot {}^2/_n R)}{n \,.\, \sin^{-2} {}^2/_n R \,.\, \tan {}^2/_n R}$

198) $\triangle baf = \overset{-2}{ai} \,.\, \cot {}^2/_n R$

---

199) $bf = ah. \dfrac{\sin {}^4/_n R}{1 - \cos {}^2/_n R}$

200) $bi = ah \dfrac{\sin {}^4/_n R}{2(1 - \cos {}^2/_n R)}$

201) $bo = ah. \dfrac{\cos {}^2/_n R}{1 - \cos {}^2/_n R}$

202) $io = ah \,.\, \cot^{-2} {}^2/_n R (1 + \cos {}^2/_n R)$

Hosted by Google

203) $a\,o = a\,h\,\dfrac{(1+\cos {}^{2}/_{n}\,R)}{\sin^{2} {}^{2}/_{n}\,R}$ **204)** $a\,i = a\,h\,(1+\cos {}^{2}/_{n}\,R)$

205) $a\,h = a\,h$ **206)** $h\,i = a\,h\,.\cos {}^{2}/_{n}\,R$

207) $b\,h\,f = a\,h\,.\dfrac{2\pi(1+\cos {}^{2}/_{n}R)\cot {}^{2}/_{n}R}{n\,.\sin {}^{2}/_{n}\,R}$ **208)** $a\,c = a\,h\,.\dfrac{(1+\cos {}^{2}/_{n}\,R)}{\sin {}^{2}/_{n}\,R}$

209) $a\,b = a\,h\,\dfrac{(1+\cos {}^{2}/_{n}\,R)}{\sin^{2} {}^{2}/_{n}\,R}$

210) $2\pi\,r = a\,h\,.\dfrac{2\pi\,.\cot {}^{2}/_{n}\,R\,(1+\cos {}^{2}/_{n}\,R)}{\sin {}^{2}/_{n}\,R}$

211) $b\,f + f\,d + d\,b = a\,h\,.\,2\,n\,.\cot {}^{2}/_{n}\,R\,(1+\cos {}^{2}/_{n}\,R)$

212) $a\,c + c\,e + e\,a = a\,h\,.\dfrac{2\,n\,(1+\cos {}^{2}/_{n}\,R)}{\sin {}^{2}/_{n}\,R}$

213) $b\,o + o\,f + f\,b = a\,h\,.\dfrac{2\,(1+\sin {}^{2}/_{n}\,R)\,(1+\cos {}^{2}/_{n}\,R)}{\sin {}^{2}/_{n}\,R\,.\tan {}^{2}/_{n}\,R}$

214) $b\,i + i\,o + o\,b = a\,h\,\dfrac{(1+\cos {}^{2}/_{n}\,R)\,(1+\sin {}^{2}/_{n}R+\cos {}^{2}/_{n}R)}{\sin {}^{2}/_{n}\,R\,.\tan {}^{2}/_{n}\,R}$

215) $a\,c + c\,o + o\,a = a\,h\,.\dfrac{2\,(1+\sin {}^{2}/_{n}\,R)\,(1+\cos {}^{2}/_{n}\,R)}{\sin^{2} {}^{2}/_{n}\,R}$

216) $b\,o + o\,c + c\,b = a\,h\,\dfrac{(1+\cos^{2}/_{n}R)(1+\sin^{2}/_{n}R+\cos^{2}/_{n}R)}{\sin^{2} {}^{2}/_{n}\,R}$

217) $a\,b + b\,f + f\,a = a\,h\,.\dfrac{2\,(1+\cos {}^{2}/_{n}\,R)^{2}}{\sin {}^{2}/_{n}\,R}$

218) $a\,b + b\,i + i\,a = a\,h\,\dfrac{(1+\cos^{2}/_{n}R)\,(1+\sin^{2}/_{n}R+\cos^{2}/_{n}R)}{\sin {}^{2}/_{n}\,R}$

219) $b\,h\,f + f\,o + o\,b = a\,h\,.\dfrac{2\,(1+\cos {}^{2}/_{n}\,R)\,(\pi+n)}{n\,.\sin {}^{2}/_{n}\,R\,.\tan {}^{2}/_{n}\,R}$

220) $b\,h\,f + f\,b = a\,h\,.\dfrac{2\,(\pi+n\,.\sin {}^{2}/_{n}\,R)}{n\,.\tan^{2} {}^{2}/_{n}\,R}$

221) $a\,b + b\,h\,f + f\,a = a\,h\,.\dfrac{2\,(1+\cos {}^{2}/_{n}\,R)\,(\pi\,.\cot {}^{2}/_{n}R+n)}{n\,.\sin {}^{2}/_{n}\,R}$

222) $a\,b + b\,o + o\,f + f\,a = a\,h\,.\dfrac{2\,(1+\cos {}^{2}/_{n}\,R)\,(1+\cot {}^{2}/_{n}\,R)}{\sin {}^{2}/_{n}\,R}$

223) $\triangle\,b\,o\,f = \overline{a\,h}^{2}\,.\cot {}^{2}/_{n}\,\overline{R}^{3}\,(1+\cos {}^{2}/_{n}\,R)^{2}$

224) $\triangle\,b\,f\,d = \overline{a\,h}^{2}\,.\,n\,.\cot {}^{2}/_{n}\,\overline{R}^{3}\,(1+\cos {}^{2}/_{n}\,R)^{2}$

Hosted by Google

225) $\triangle a c o = \overline{ah}^{-2} . \frac{\cot^2/_n R (1 + \cos^2/_n R)^2}{\overline{\sin^2/_n R}^{-2}}$

226) $\triangle a c e = \overline{ah}^{-2} . \frac{n . \cot^2/_n R (1 + \cos^2/_n R)^2}{\overline{\sin^2/_n R}^{-2}}$

227) $b o f h = \overline{ah}^{-2} . \frac{\pi . \overline{\cot^2/_n R}^{-2} (1 + \cos^2/_n R)^2}{n . \overline{\sin^2/_n R}^{-2}}$

228) $\pi r^2 = \overline{ah}^{-2} . \frac{\pi . \overline{\cot^2/_n R}^{-2} (1 + \cos^2/_n R)^2}{\overline{\sin^2/_n R}^{-2}}$

229) $b h f i = \overline{ah}^{-2} \frac{(1+\cos^2/_n R)^2 (\pi - n . \sin^2/_n R . \cos^2/_n R)}{n . \overline{\sin^2/_n R}^{-2} . \overline{\tan^2/_n R}^{-2}}$

230) $b h f a = \overline{ah}^{-2} \frac{(1 + \cos^2/_n R)^2 (n - \pi . \cot^2/_n R)}{n \ \overline{\sin^2/_n R}^{-2} . \tan^2/_n R}$

231) $\triangle b a f = \overline{ah}^{-2} . \cot^2/_n R (1+\cos^2/_n R)^2$

---

232) $bf = bi . \frac{2 (1 + \cos^2/_n R)}{\sin^2/_n R}$

233) $bi = hi \frac{(1 + \cos^2/_n R)}{\sin^2/_n R}$

234) $bo = hi \frac{(1 + \cos^2/_n R)}{\overline{\sin^2/_n R}^{-2}}$

235) $io = hi . \frac{\cos^2/_n R}{1 - \cos^2/_n R}$

236) $ao = hi \frac{(1 + \cos^2/_n R)}{\overline{\sin^2/_n R . \cos^2/_n R}^{-2}}$

237) $ai = hi \frac{(1+\cos^2/_n R)}{\cos^2/_n R}$

238) $ah = \frac{hi}{\cos^2/_n R}$

239) $hi = hi$

340) $bhf = hi \frac{2\pi (1 + \cos^2/_n R)}{\overline{n . \sin^2/_n R}^{-2}}$

241) $ac = hi . \frac{2 (1 + \cos^2/_n R)}{\sin^2/_n R . \cos^2/_n R}$

242) $ab = hi \frac{(1 + \cos^2/_n R)}{\sin^2/_n R . \cos^2/_n R}$

243) $2\pi r = hi . \frac{2\pi (1 + \cos^2/_n R}{\overline{\sin^2/_n R}^{-2}}$

244) $bf + fd + db = hi . \frac{2n (1 + \cos^2/_n R)}{\sin^2/_n R}$

Hosted by Google

245) $ac + ce + ea = hi. \dfrac{2n(1 + \cos {}^2/_n R)}{\sin {}^2/_n R . \cos {}^2/_n R}$

246) $bo + of + fb = hi. \dfrac{2(1 + \sin {}^2/_n R)(1 + \cos {}^2/_n R)}{\overline{\sin {}^2/_n R}^2}$

247) $bi + io + ob = hi \dfrac{(1 + \cos {}^2/_n R)(1 + \sin {}^2/_n R + \cos {}^2/_n R)}{\overline{\sin {}^2/_n R}^2}$

248) $ac + co + oa = hi. \dfrac{2(1 + \sin {}^2/_n R)(1 + \cos {}^2/_n R)}{\overline{\sin {}^2/_n R . \cos {}^2/_n R}^2}$

249) $bo + oc + cb = hi \dfrac{(1 + \cos {}^2/_n R)(1 + \sin {}^2/_n R + \cos {}^2/_n R)}{\overline{\sin {}^2/_n R . \cos {}^2/_n R}^2}$

250) $ab + bf + fa = hi. \dfrac{2(1 + \cos {}^2/_n R)^2}{\sin {}^2/_n R . \cos {}^2/_n R}$

251) $ab + bi + ia = hi \dfrac{(1 + \cos {}^2/_n R)(1 + \sin {}^2/_n R + \cos {}^2/_n R)}{\sin {}^2/_n R . \cos {}^2/_n R}$

252) $bhf + fo + ob = hi. \dfrac{2(1 + \cos {}^2/_n R)(n + \pi)}{n . \overline{\sin {}^2/_n R}^2}$

253) $bhf + fb = hi. \dfrac{2(1 + \cos {}^2/_n R)(n . \sin {}^2/_n R + \pi)}{n . \overline{\sin {}^2/_n R}^2}$

254) $ab + bhf + fa = hi. \dfrac{2(1 + \cos {}^2/_n R)(\pi + n . \tan {}^2/_n R)}{n . \overline{\sin {}^2/_n R}^2}$

255) $ab + bo + of + fa = hi. \dfrac{2(1 + \cos {}^2/_n R)(1 + \tan {}^2/_n R)}{\overline{\sin {}^2/_n R}^2}$

256) $\triangle bof = \overline{hi}^2 \dfrac{(1 + \cos {}^2/_n)^2 . \cot {}^2/_n R}{\overline{\sin {}^2/_n R}^2}$

257) $\triangle bfd = \overline{hi}^2 \dfrac{(1 + \cos {}^2/_n R)^2 . n . \cot {}^2/_n R}{\overline{\sin {}^2/_n R}^2}$

258) $\triangle aco = \overline{hi}^2 \dfrac{(1 + \cos {}^2/_n R)^2}{\overline{\sin {}^2/_n R}^3 . \cos {}^2/_n R}$ **259)** $\triangle ace = \overline{hi}^2 . \dfrac{n(1 + \cos {}^2/_n R)^2}{\overline{\sin {}^2/_n R}^3 . \cos {}^2/_n R}$

260) $bofh = \overline{hi}^2 . \dfrac{\pi(1 + \cos {}^2/_n R)^2}{n . \overline{\sin {}^2/_n R}^4}$ **261)** $\pi r^2 = \overline{hi}^2 . \dfrac{\pi (1 + \cos {}^2/_n R)^2}{\overline{\sin {}^2/_n R}^4}$

Hosted by Google

262) $bhfi = \overline{hi}^{-2} \dfrac{(1+\cos^2/_n R)^2(\pi - n.\sin^2/_n R.\cos^2/_n R)}{n.\sin^2/_n \overline{R}^4}$

263) $bhfa = \overline{hi}^{-2} \dfrac{(1+\cos^2/_n R)^2(n.\tan^2/_n R - \pi)}{n.\sin^2/_n \overline{R}^4}$

264) $\triangle baf = \overline{hi}^{-2} \dfrac{(1+\cos^2/_n R)^2}{\sin^2/_n R.\cos^2/_n R}$

---

265) $bf = bhf.\dfrac{n.\sin^2/_n R}{\pi}$

266) $bi = bhf.\dfrac{n.\sin^2/_n R}{2\pi}$ **267)** $bo = bhf.\dfrac{n}{2\pi}$

268) $io = bhf.\dfrac{n.\cos^2/_n R}{2\pi}$ **269)** $ao = bhf.\dfrac{n}{2\pi.\cos^2/_n R}$

270) $ai = bhf.\dfrac{n\sin^2/_n R.\tan^2/_n R}{2\pi}$ **271)** $ah = bhf.\dfrac{n(1-\cos^2/_n R)}{2\pi.\cos^2/_n R}$

272) $hi = bhf.\dfrac{n(1-\cos^2/_n R)}{2\pi}$ **273)** $bhf = bhf$

274) $ac = bhf.\dfrac{n.\tan^2/_n R}{\pi}$ **275)** $ab = bhf.\dfrac{n.\tan^2/_n R}{2\pi}$

276) $2\pi r = bhf.n$

277) $bf + fd + db = bhf.\dfrac{n^2.\sin^2/_n R}{\pi}$

278) $ac + ce + ea = bhf.\dfrac{n^2.\tan^2/_n R}{\pi}$

279) $bo + of + fb = bhf.\dfrac{n(1+\sin^2/_n R)}{\pi}$

280) $bi + io + ob = bhf.\dfrac{n(1+\sin^2/_n R+\cos^2/_n R)}{2\pi}$

281) $ac + co + oa = bhf.\dfrac{n(1+\sin^2/_n R)}{\pi.\cos^2/_n R}$

282) $bo + oc + cb = bhf.\dfrac{n(1+\sin^2/_n R+\cos^2/_n R)}{2\pi.\cos^2/_n R}$

283) $ab + bf + fa = bhf.\dfrac{n(1+\cos^2/_n R)}{\pi.\cot^2/_n R}$

Hosted by Google

284) $ab + bi + ia = bhf \cdot \frac{n(1 + \sin {}^2/_n R + \cos {}^2/_n R)}{2\pi \cdot \cot {}^2/_n R}$

285) $bhf + fo + ob = bhf \frac{(\pi + n)}{\pi}$

286) $bhf + fb = bhf \frac{(\pi + n \cdot \sin {}^2/_n R)}{\pi}$

287) $ab + bhf + fa = bhf \frac{(\pi + n \cdot \tan {}^2/_n R)}{\pi}$

288) $ab + bo + of + fa = bhf \cdot \frac{n(1 + \tan {}^2/_n R)}{\pi}$

289) $\triangle bof = \overline{bhf}^2 \cdot \frac{n^2 \cdot \sin {}^2/_n R \cdot \cos {}^2/_n R}{4\pi^2}$

290) $\triangle bfd = \overline{bhf}^2 \cdot \frac{n^3 \cdot \sin {}^2/_n R \cdot \cos {}^2/_n R}{4\pi^2}$

291) $\triangle aco = \overline{bhf}^2 \cdot \frac{n^2 \cdot \tan {}^2/_n R}{4\pi^2}$ **292)** $\triangle ace = \overline{bhf}^2 \cdot \frac{n^3 \cdot \tan {}^2/_n R}{4\pi^2}$

293) $bohf = \overline{bhf}^2 \cdot \frac{n}{4\pi}$ **294)** $\pi r^2 = \overline{bhf}^2 \cdot \frac{n^2}{4\pi}$

295) $bhfi = \overline{bhf}^2 \cdot \frac{n(\pi - n \cdot \sin {}^2/_n R \cdot \cos {}^2/_n R)}{4\pi^2}$

296) $bhfa = \overline{bhf}^2 \cdot \frac{n(n \cdot \tan {}^2/_n R - \pi)}{4\pi^2}$

297) $\triangle baf = \overline{bhf}^2 \cdot \frac{n^2 \cdot \sin {}^2/_n R \cdot \tan {}^2/_n R}{4\pi^2}$

---

298) $bf = ac \cdot \cos {}^2/_n R$ **299)** $bi = ac \cdot \frac{\cos {}^2/_n R}{2}$

300) $bo = ac \cdot \frac{\cot {}^2/_n R}{2}$ **301)** $io = ac \cdot \frac{\cos {}^2/_n R \cdot \cot {}^2/_n R}{2}$

302) $ao = \frac{ac}{2 \sin {}^2/_n R}$ **303)** $ai = ac \cdot \frac{\sin {}^2/_n R}{2}$

304) $ah = ac \frac{(1 - \cos {}^2/_n R)}{2 \sin {}^2/_n R}$ **305)** $hi = ac \frac{(1 - \cos {}^2/_n R) \cot {}^2/_n R}{2}$

306) $bhf = ac \cdot \frac{\pi \cdot \cot {}^2/_n R}{n}$ **307)** $ac = ac$ **308)** $ab = \frac{ac}{2}$

309) $2\pi r = ac \cdot \pi \cdot \cot {}^2/_n R$ **310)** $bf + fd + db = ac \cdot n \cdot \cos {}^2/_n R$

311) $ac + ce + ea = ac \cdot n$

312) $bo + of + fb = ac \cdot \cot {}^2/_n R (1 + \sin {}^2/_n R)$

Hosted by Google

313) $b\,i + i\,o + o\,b = a\,c\,\frac{(1 + \sin {}^{2}/_{n}\,R + \cos {}^{2}/_{n}\,R)}{2 \tan {}^{2}/_{n}\,R}$

314) $a\,c + c\,o + o\,a = a\,c\,\frac{(1 + \sin {}^{2}/_{n}\,R)}{\sin {}^{2}/_{n}\,R}$

315) $b\,o + o\,c + c\,b = a\,c\,\frac{(1 + \sin {}^{2}/_{n}\,R + \cos {}^{2}/_{n}\,R)}{2 \sin {}^{2}/_{n}\,R}$

316) $a\,b + b\,f + f\,a = a\,c\,(1 + \cos {}^{2}/_{n}\,R)$

317) $a\,b + b\,i + i\,a = a\,c\,\frac{(1 + \sin {}^{2}/_{n}\,R + \cos {}^{2}/_{n}\,R)}{2}$

318) $b\,h\,f + f\,o + o\,b = a\,c\,.\,\frac{\cot {}^{2}/_{n}\,R\,(\pi + n)}{n}$

319) $b\,h\,f + f\,b = a\,c\,\frac{(\pi\,.\cot {}^{2}/_{n}\,R + n\,.\cos {}^{2}/_{n}\,R)}{n}$

320) $a\,b + b\,h\,f + f\,a = a\,c\,\frac{(\pi\,.\cot {}^{2}/_{n}\,R + n)}{n}$

321) $a\,b + b\,o + o\,f + f\,a = a\,c\,(1 + \cot {}^{2}/_{n}\,R)$

322) $\triangle\,b\,o\,f = a\,c^{-2}\,.\,\frac{\cos {}^{2}/_{n}\,R^{-2}\,.\cot {}^{2}/_{n}\,R}{4}$

323) $\triangle\,b\,f\,d = a\,c^{-2}\,.\,\frac{n\,.\cos {}^{2}/_{n}\,R^{-2}\,.\cot {}^{2}/_{n}\,R}{4}$

324) $\triangle\,a\,c\,o = a\,c^{-2}\,.\,\frac{\cot {}^{2}/_{n}\,R}{4}$ **325)** $\triangle\,a\,c\,e = a\,c^{-2}\,.\,\frac{n\,.\cot {}^{2}/_{n}\,R}{4}$

326) $b\,o\,f\,h = a\,c^{-2}\,.\,\frac{\pi\,.\cot {}^{2}/_{n}\,R^{-2}}{4\,n}$ **327)** $\pi\,r^{2} = a\,c^{-2}\,.\,\frac{\pi\,.\cot {}^{2}/_{n}\,R^{-2}}{4}$

328) $b\,h\,f\,i = a\,c^{-2}\,\frac{(\pi - n\,.\sin {}^{2}/_{n}\,R\,.\cos {}^{2}/_{n}\,R)}{4\,n\,.\tan {}^{2}/_{n}\,R^{-2}}$

329) $b\,h\,f\,a = a\,c^{-2}\,\frac{(n - \pi\,.\cot {}^{2}/_{n}\,R)}{4\,n\,.\tan {}^{2}/_{n}\,R)}$

330) $\triangle\,b\,a\,f = a\,c^{-2}\,.\,\frac{\sin {}^{2}/_{n}\,R\,.\cos {}^{2}/_{n}\,R}{4}$

---

331) $b\,f = a\,b\,.\,2 \cos {}^{2}/_{n}\,R$ **332)** $b\,i = a\,b\,.\cos {}^{2}/_{n}\,R$

333) $b\,o = a\,b\,.\cot {}^{2}/_{n}\,R$ **334)** $i\,o = a\,b\,.\cos {}^{2}/_{n}\,R\,.\cot {}^{2}/_{n}\,R$

335) $a\,o = \frac{a\,b\,.}{\sin {}^{2}/_{n}\,R}$ **336)** $a\,h = a\,b\,\frac{(1 - \cos {}^{2}/_{n}\,R)}{\sin {}^{2}/_{n}\,R}$

Hosted by Google

337) $a\,i = a\,b \,.\, \sin {}^{2}/_{n}\,R$ **338)** $h\,i = a\,b \,.\, \cot {}^{2}/_{n}\,R\,(1 - \cos {}^{2}/_{n}\,R)$

339) $b\,h\,f = a\,b \,.\, \dfrac{2\,\pi \,.\, \cot {}^{2}/_{n}\,R}{n}$ **340)** $a\,c = a\,b \,.\, 2$ **341)** $a\,b = a\,b$

342) $2\,\pi\,r = a\,b \,.\, 2\,\pi \,.\, \cot {}^{2}/_{n}\,R$ **343)** $b\,f + f\,d + d\,b = a\,b \,.\, 2\,n \,.\, \cos {}^{2}/_{n}R$

344) $a\,c + c\,e + e\,a = a\,b \,.\, 2\,n$

345) $b\,o + o\,f + f\,b = a\,b \,.\, 2 \cot {}^{2}/_{n}\,R\,(1 + \sin {}^{2}/_{n}\,R)$

346) $b\,i + i\,o + o\,b = a\,b \,.\, \cot {}^{2}/_{n}\,R\,(1 + \sin {}^{2}/_{n}\,R + \cos {}^{2}/_{n}\,R)$

347) $a\,c + c\,o + o\,a = a\,b \,.\, \dfrac{2\,(1 + \sin {}^{2}/_{n}\,R)}{\sin {}^{2}/_{n}\,R}$

348) $b\,o + o\,c + c\,b = a\,b\,\dfrac{(1 + \sin {}^{2}/_{n}\,R + \cos {}^{2}/_{n}\,R)}{\sin {}^{2}/_{n}\,R}$

349) $a\,b + b\,f + f\,a = a\,b \,.\, 2\,(1 + \cos {}^{2}/_{n}\,R)$

350) $a\,b + b\,i + i\,a = a\,b\,(1 + \sin {}^{2}/_{n}\,R + \cos {}^{2}/_{n}\,R)$

351) $b\,h\,f + f\,o + o\,b = a\,b \,.\, \dfrac{2 \cot {}^{2}/_{n}\,R\,(\pi + n)}{n}$

352) $b\,h\,f + f\,b = a\,b \,.\, \dfrac{2\,(n \,.\, \cos {}^{2}/_{n}\,R + \pi \,.\, \cot {}^{2}/_{n}\,R)}{n}$

353) $a\,b + b\,h\,f + f\,a = a\,b \,.\, \dfrac{2\,(n + \pi \,.\, \cot {}^{2}/_{n}\,R)}{n}$

354) $a\,b + b\,o + o\,f + f\,a = a\,b \,.\, 2\,(1 + \cot {}^{2}/_{n}\,R)$

355) $\triangle\ b\,o\,f = a\,b^{-2} \,.\, \cos {}^{2}/_{n}\,R^{-2} \,.\, \cot {}^{2}/_{n}\,R$

356) $\triangle\ b\,f\,d = a\,b^{-2} \,.\, n \,.\, \cos {}^{2}/_{n}\,R^{-2} \,.\, \cot {}^{2}/_{n}\,R$

357) $\triangle\ a\,c\,o = a\,b^{-2} \,.\, \cot {}^{2}/_{n}\,R$ **358)** $\triangle\ a\,c\,e = a\,b^{-2} \,.\, n \,.\, \cot {}^{2}/_{n}\,R$

359) $b\,o\,f\,h = a\,b^{-2} \,.\, \dfrac{\pi \,.\, \cot {}^{2}/_{n}\,R^{-2}}{n}$ **360)** $\pi\,r^2 = a\,b^{-2} \,.\, \pi \,.\, \cot {}^{2}/_{n}\,R^{-2}$

361) $b\,h\,f\,i = a\,b^{-2}\,\dfrac{(\pi - n \,.\, \sin {}^{2}/_{n}\,R \,.\, \cos {}^{2}/_{n}\,R)}{n \,.\, \tan {}^{2}/_{n}\,R^{-2}}$

362) $b\,h\,f\,a = a\,b^{-2}\,\dfrac{(n - \pi \,.\, \cot {}^{2}/_{n}\,R)}{n \,.\, \tan {}^{2}/_{n}\,R}$

363) $\triangle\ b\,a\,f = a\,b^{-2} \,.\, \sin {}^{2}/_{n}\,R \cos {}^{2}/_{n}\,R$

---

364) $b\,f = (2\,\pi\,r)\,\dfrac{\sin {}^{2}/_{n}\,R}{\pi}$ **365)** $b\,i = (2\,\pi\,r)\,\dfrac{\sin {}^{2}/_{n}\,R}{2\,\pi}$

Hosted by Google

366) $b\,o = \dfrac{(2\,\pi\,r)}{2\,\pi}$ **367)** $i\,o = (2\,\pi\,r)\dfrac{\cos {}^{2}/_{n}\,R}{2\,\pi}$

368) $a\,o = \dfrac{(2\,\pi\,r)}{2\,\pi\,.\cos {}^{2}/_{n}\,R}$ **369)** $a\,i = (2\,\pi\,r)\dfrac{\sin {}^{2}/_{n}\,R\,.\tan {}^{2}/_{n}\,R}{2\,\pi}$

370) $a\,h = (2\,\pi\,r)\dfrac{(1 - \cos {}^{2}/_{n}\,R)}{2\,\pi\,.\cos {}^{2}/_{n}\,R}$ **371)** $h\,i = (2\,\pi\,r)\dfrac{(1 - \cos {}^{2}/_{n}\,R)}{2\,\pi}$

372) $b\,h\,f = \dfrac{(2\,\pi\,r)}{n}$ **373)** $a\,c = (2\,\pi\,r)\dfrac{\tan {}^{2}/_{n}\,R}{\pi}$

374) $a\,b = (2\,\pi\,r)\dfrac{\tan {}^{2}/_{n}\,R}{2\,\pi}$ **375)** $2\,\pi\,r = (2\,\pi\,r)$

376) $b\,f + f\,d + d\,b = (2\,\pi\,r)\,.\dfrac{n\,.\sin {}^{2}/_{n}\,R}{\pi}$

377) $a\,c + c\,e + e\,a = (2\,\pi\,r)\dfrac{n\,.\tan {}^{2}/_{n}\,R}{\pi}$

378) $b\,o + o\,f + f\,b = (2\,\pi\,r)\dfrac{(1 + \sin {}^{2}/_{n}\,R)}{\pi}$

379) $b\,i + i\,o + o\,b = (2\,\pi\,r)\dfrac{(1 + \sin {}^{2}/_{n}\,R + \cos {}^{2}/_{n}\,R)}{2\,\pi}$

380) $a\,c + c\,o + c\,a = (2\,\pi\,r)\dfrac{(1 + \sin {}^{2}/_{n}\,R)}{\pi\,.\cos {}^{2}/_{n}\,R}$

381) $b\,o + o\,c + c\,b = (2\,\pi\,r)\dfrac{(1 + \sin {}^{2}/_{n}\,R + \cos {}^{2}/_{n}\,R)}{2\,\pi\,.\cos {}^{2}/_{n}\,R}$

382) $a\,b + b\,f + f\,a = (2\,\pi\,r)\dfrac{(1 + \cos {}^{2}/_{n}\,R)}{\pi\,.\cot {}^{2}/_{n}\,R}$

383) $a\,b + b\,i + i\,a = (2\,\pi\,r)\dfrac{(1 + \sin {}^{2}/_{n}\,R + \cos {}^{2}/_{n}\,R)}{2\,\pi\,.\cot {}^{2}/_{n}\,R}$

384) $b\,h\,f + f\,o + o\,b = (2\,\pi\,r)\dfrac{(\pi + n)}{\pi\,.\,n}$

385) $b\,h\,f + f\,b = (2\,\pi\,r)\dfrac{(\pi + n\,.\sin {}^{2}/_{n}\,R)}{\pi\,.\,n}$

386) $a\,b + b\,h\,f + f\,a = (2\,\pi\,r)\dfrac{(\pi + n\,.\tan {}^{2}/_{n}\,R)}{\pi\,.\,n}$

387) $a\,b + b\,o + o\,f + f\,a = (2\,\pi\,r)\dfrac{(1 + \tan {}^{2}/_{n}\,R)}{\pi}$

388) $\triangle\,b\,o\,f = (2\,\pi\,r)^{2}.\dfrac{\sin {}^{2}/_{n}\,R\,.\cos {}^{2}/_{n}\,R}{4\,\pi^{2}}$

389) $\triangle\,b\,f\,d = (2\,\pi\,r)^{2}\dfrac{n\,.\sin {}^{2}/_{n}\,R\,.\cos {}^{2}/_{n}\,R}{4\,\pi^{2}}$

Hosted by Google

390) $\triangle\, a\,c\,o = (2\,\pi\,r)^2 \dfrac{\tan {}^2/_n\,R}{4\,\pi^2}$ **391)** $\triangle\, a\,c\,e = (2\,\pi\,r)^2 \dfrac{n\,.\tan {}^2/_n\,R}{4\,\pi^2}$

392) $b\,o\,f\,h = \dfrac{(2\,\pi\,r)^2}{4\,\pi\,.\,n}$ **393)** $\pi\,r^2 = \dfrac{(2\,\pi\,r)^2}{4\,\pi}$

394) $b\,h\,f\,i = (2\,\pi\,r)^2 \dfrac{(\pi - n\,.\sin {}^2/_n\,R\,.\cos {}^2/_n\,R)}{4\,n\,.\,\pi^2}$

395) $b\,h\,f\,a = (2\,\pi\,r)^2 \dfrac{(n\,.\tan {}^2/_n\,R - \pi)}{4\,n\,.\,\pi^2}$

396) $\triangle\, b\,a\,f = (2\,\pi\,r)^2 \dfrac{\sin {}^2/_n\,R\,.\tan {}^2/_n\,R}{4\,\pi^2}$

---

397) $b\,f = \dfrac{(b\,f + f\,d + d\,b)}{n}$ **398)** $b\,i = \dfrac{(b\,f + f\,d + d\,b)}{2\,n}$

399) $b\,o = \dfrac{(b\,f + f\,d + d\,b)}{2\,n\,.\sin {}^2/_n\,R}$ **400)** $i\,o = (b\,f + f\,d + d\,b)\dfrac{\cot {}^2/_n\,R}{2\,n}$

401) $a\,o = \dfrac{(b\,f + f\,d + d\,b)}{n\,.\sin {}^4/_n\,R}$ **402)** $a\,i = (b\,f + f\,d + d\,b)\dfrac{\tan {}^2/_n\,R}{2\,n}$

403) $a\,h = (b\,f + f\,d + d\,b)\dfrac{(1 - \cos {}^2/_n\,R)}{n\,.\sin {}^4/_n\,R}$

404) $h\,i = (b\,f + f\,d + d\,b)\dfrac{(1 - \cos {}^2/_n\,R}{2\,n\,.\sin {}^2/_n\,R}$

405) $b\,h\,f = (b\,f + f\,d + d\,b)\dfrac{\pi}{n^2\,.\sin {}^2/_n\,R}$ **406)** $a\,c = \dfrac{(b\,f + f\,d + d\,b)}{n\,.\cos {}^2/_n\,R}$

407) $a\,b = \dfrac{(b\,f + f\,d + d\,b)}{2\,n\,.\cos {}^2/_n\,R}$ **408)** $2\,\pi\,r = (b\,f + f\,d + d\,b)\dfrac{\pi}{n\,.\sin {}^2/_n\,R}$

409) $b\,f + f\,d + d\,b = b\,f + f\,d + d\,b$

410) $a\,c + c\,e + e\,a = \dfrac{(b\,f + f\,d + d\,b)}{\cos {}^2/_n\,R}$

411) $b\,o + o\,f + f\,b = (b\,f + f\,d + d\,b)\dfrac{(1 + \sin {}^2/_n\,R)}{n\,.\sin {}^2/_n\,R}$

412) $b\,i + i\,o + o\,b = (b\,f + f\,d + d\,b)\dfrac{(1 + \sin {}^2/_n\,R + \cos {}^2/_n\,R)}{n\,.\sin {}^2/_n\,R}$

413) $a\,c + c\,o + o\,a = (b\,f + f\,d + d\,b)\dfrac{2\,(1 + \sin {}^2/_n\,R)}{n\,.\sin {}^4/_n\,R}$

414) $b\,o + o\,c + c\,b = (b\,f + f\,d + d\,b)\dfrac{(1 + \sin {}^2/_n\,R + \cos {}^2/_n\,R)}{n\,.\sin {}^4/_n\,R}$

Hosted by Google

415) $a\,b + b\,f + f\,a = (b\,f + f\,d + d\,b)\,\dfrac{(1 + \cos {}^{2}/_{n}\,R)}{n \,.\, \cos {}^{2}/_{n}\,R}$

416) $a\,b + b\,i + i\,a = (b\,f + f\,d + d\,b)\,\dfrac{(1 + \sin {}^{2}/_{n}\,R + \cos {}^{2}/_{n}\,R)}{2\,n \,.\, \cos {}^{2}/_{n}\,R}$

417) $b\,h\,f + f\,o + o\,b = (b\,f + f\,d + d\,b)\,\dfrac{(\pi + n)}{n^2 \,.\, \sin {}^{2}/_{n}\,R}$

418) $b\,h\,f + f\,b = (b\,f + f\,d + d\,b)\,\dfrac{(n \,.\, \sin {}^{2}/_{n}\,R + \pi)}{n^2 \,.\, \sin {}^{2}/_{n}\,R}$

419) $a\,b + b\,h\,f + f\,a = (b\,f + f\,d + d\,b)\,\dfrac{(\pi + n \,.\, \tan {}^{2}/_{n}\,R)}{n^2 \,.\, \sin {}^{2}/_{n}\,R}$

420) $a\,b + b\,o + o\,f + f\,a = (b\,f + f\,d + d\,b)\,\dfrac{(1 + \tan {}^{2}/_{n}\,R)}{n \,.\, \sin {}^{2}/_{n}\,R}$

421) $\triangle\, b\,o\,f = (b\,f + f\,d + d\,b)^2\,\dfrac{\cot {}^{2}/_{n}\,R}{4\,n^2}$

422) $\triangle\, b\,f\,d = (b\,f + f\,d + d\,b)^2\,\dfrac{\cot {}^{2}/_{n}\,R}{4\,n}$

423) $\triangle\, a\,c\,o = \dfrac{(b\,f + f\,d + d\,b)^2}{4\,n^2 \,.\, \sin {}^{2}/_{n}\,R \,.\, \cos {}^{2}/_{n}\,R}$ **424)** $\triangle\, a\,c\,e = \dfrac{(b\,f + f\,d + d\,b)^2}{2\,n \,.\, \sin {}^{4}/_{n}\,R}$

425) $b\,o\,f\,h = \dfrac{(b\,f + f\,d + d\,b)^2 \,.\, \pi}{4\,n^3 \,.\, \sin {}^{2}/_{n}\,R}$ **426)** $\pi\,r^2 = \dfrac{(b\,f + f\,d + d\,b)^2 \,.\, \pi}{4\,n^2 \,.\, \sin {}^{2}/_{n}\,R}$

427) $b\,h\,f\,i = (b\,f + f\,d + d\,b)^2\,\dfrac{(\pi - n \,.\, \sin {}^{2}/_{n}\,R \,.\, \cos {}^{2}/_{n}\,R)}{4\,n^3 \,.\, \sin {}^{2}/_{n}\,R}$

428) $b\,h\,f\,a = (b\,f + f\,d + d\,b)^2\,\dfrac{(n \,.\, \tan {}^{2}/_{n}\,R - \pi)}{4\,n^3 \,.\, \sin {}^{2}/_{n}\,R}$

429) $\triangle\, b\,a\,f = (b\,f + f\,d + d\,b)^2 \,.\, \dfrac{\tan {}^{2}/_{n}\,R}{4\,n^2}$

---

430) $b\,f = (a\,c + c\,e + e\,a)\,\dfrac{\cos {}^{2}/_{n}\,R}{n}$ **431)** $b\,i = (a\,c + c\,e + e\,a)\,\dfrac{\cos {}^{2}/_{n}\,R}{2\,n}$

432) $b\,o = (a\,c + c\,e + e\,a)\,\dfrac{\cot {}^{2}/_{n}\,R}{2\,n}$

433) $i\,o = (a\,c + c\,e + e\,a)\,\dfrac{\cos {}^{2}/_{n}\,R \,.\, \cot {}^{2}/_{n}\,R}{2\,n}$

434) $a\,o = \dfrac{(a\,c + c\,e + e\,a)}{2\,n \,.\, \sin {}^{2}/_{n}\,R}$ **435)** $a\,i = (a\,c + c\,e + e\,a)\,\dfrac{\sin {}^{2}/_{n}\,R}{2\,n}$

Hosted by Google

436) $a\,h = (a\,c + c\,e + e\,a)\dfrac{(1 - \cos {}^{2}/_{n}\,R)}{2\,n\,.\,\sin {}^{2}/_{n}\,R}$

437) $h\,i = (a\,c + c\,e + e\,a)\dfrac{1 - \cos {}^{2}/_{n}\,R)}{2\,n\,.\,\tan {}^{2}/_{n}\,R}$

438) $b\,h\,f = (a\,c + c\,e + e\,a)\dfrac{\pi\,.\,\cot {}^{2}/_{n}\,R}{n^{2}}$

439) $a\,c = \dfrac{(a\,c + c\,e + e\,a)}{n}$ **440)** $a\,b = \dfrac{(a\,c + c\,e + e\,a)}{2\,n}$

441) $2\,\pi\,r = (a\,c + c\,e + e\,a)\dfrac{\pi\,.\,\cot {}^{2}/_{n}\,R}{n}$

442) $b\,f + f\,d + d\,b = (a\,c + c\,e + e\,a)\cos {}^{2}/_{n}\,R$

443) $a\,c + c\,e + e\,a = a\,c + c\,e + e\,a$

444) $b\,o + o\,f + f\,b = (a\,c + c\,e + e\,a)\dfrac{(1 + \sin {}^{2}/_{n}\,R)}{n\,.\,\tan {}^{2}/_{n}\,R}$

445) $b\,i + i\,o + o\,b = (a\,c + c\,e + e\,a)\dfrac{(1 + \sin {}^{2}/_{n}\,R + \cos {}^{2}/_{n}\,R)}{2\,n\,.\,\tan {}^{2}/_{n}\,R}$

446) $a\,c + c\,o + o\,a = (a\,c + c\,e + e\,a)\dfrac{(1 + \sin {}^{2}/_{n}\,R)}{n\,.\,\sin {}^{2}/_{n}\,R}$

447) $b\,o + o\,c + c\,b = (a\,c + c\,e + e\,a)\dfrac{(1 + \sin {}^{2}/_{n}\,R + \cos {}^{2}/_{n}\,R)}{2\,n\,.\,\sin {}^{2}/_{n}\,R}$

448) $a\,b + b\,f + f\,a = (a\,c + c\,e + e\,a)\dfrac{(1 + \cos {}^{2}/_{n}\,R)}{n}$

449) $a\,b + b\,i + i\,a = (a\,c + c\,e + e\,a)\dfrac{(1 + \sin {}^{2}/_{n}\,R + \cos {}^{2}/_{n}\,R)}{2\,n}$

450) $b\,h\,f + f\,o + o\,b = (a\,c + c\,e + e\,a)\dfrac{(\pi + n)\cot {}^{2}/_{n}\,R}{n^{2}}$

451) $b\,h\,f + f\,b = (a\,c + c\,e + e\,a)\dfrac{(\pi + n\,.\,\sin {}^{2}/_{n}\,R)}{n^{2}\,.\,\tan {}^{2}/_{n}\,R}$

452) $a\,b + b\,h\,f + f\,a = (a\,c + c\,e + e\,a)\dfrac{(\pi\,.\,\cot {}^{2}/_{n}\,R + n)}{n^{2}}$

453) $a\,b + b\,o + o\,f + f\,a = (a\,c + c\,e + e\,a)\dfrac{(1 + \cot {}^{2}/_{n}\,R)}{n}$

454) $\triangle\,b\,o\,f = (a\,c + c\,e + e\,a)^{2}\dfrac{\cos {}^{2}/_{n}\,R\,.\,\cot {}^{2}/_{n}\,R}{4\,n^{2}}$

455) $\triangle\,b\,f\,d = (a\,c + c\,e + e\,a)^{2}\dfrac{\cos {}^{2}/_{n}\,R\,.\,\cot {}^{2}/_{n}\,R}{4\,n}$

456) $\triangle\,a\,c\,o = (a\,c + c\,e + e\,a)^{2}\dfrac{\cot {}^{2}/_{n}\,R}{4\,n^{2}}$

Hosted by Google

457) $\triangle a\,c\,e = (a\,c + c\,e + e\,a)^2 \dfrac{\cot {}^2/_n\,R}{4\,n}$

458) $b\,o\,f\,h = (a\,c + c\,e + e\,a)^2 \dfrac{\cot^2 {}^2/_n\,R}{4\,n^3}$

459) $\pi\,r^2 = (a\,c + c\,e + e\,a)^2 \dfrac{\cot^2 {}^2/_n\,R}{4\,n^2}$

460) $b\,h\,f\,i = (a\,c + c\,e + e\,a)^2 \dfrac{(\pi - n\,.\sin {}^2/_n\,R\,.\cos {}^2/_n\,R)}{4\,n^3\,.\tan^2 {}^2/_n\,R}$

461) $b\,h\,f\,a = (a\,c + c\,e + e\,a)^2 \dfrac{(n - \pi\,.\cot {}^2/_n\,R)}{4\,n^3\,.\tan {}^2/_n\,R}$

462) $\triangle b\,a\,f = (a\,c + c\,e + e\,a)^2 \dfrac{\sin {}^2/_n\,R\,.\cos {}^2/_n\,R}{4\,n^2}$

---

463) $b\,f = (b\,o + o\,f + f\,b) \dfrac{\sin {}^2/_n\,R}{1 + \sin {}^2/_n\,R}$

464) $b\,i = (b\,o + o\,f + f\,b) \dfrac{\sin {}^2/_n\,R}{2\,(1 + \sin {}^2/_n\,R)}$

465) $b\,o = \dfrac{(b\,o + o\,f + f\,b)}{2\,(1 + \sin {}^2/_n\,R)}$

466) $i\,o = (b\,o + o\,f + f\,b) \dfrac{\cos {}^2/_n\,R}{2\,(1 + \sin {}^2/_n\,R)}$

467) $a\,o = \dfrac{(b\,o + o\,f + f\,b)}{2\,(1 + \sin {}^2/_n\,R)\cos {}^2/_n\,R}$

468) $a\,i = (b\,o + o\,f + f\,b) \dfrac{\sin {}^2/_n\,R\,.\tan {}^2/_n\,R}{2\,(1 + \sin {}^2/_n\,R)}$

469) $a\,h = (b\,o + o\,f + f\,b) \dfrac{(1 - \cos {}^2/_n\,R)}{2\,(1 + \sin {}^2/_n\,R)\cos {}^2/_n\,R}$

470) $h\,i = (b\,o + o\,f + f\,b) \dfrac{(1 - \cos {}^2/_n\,R)}{2\,(1 + \sin {}^2/_n\,R)}$

471) $b\,h\,f = \dfrac{(b\,o + o\,f + f\,b)\,.\,\pi}{n\,(1 + \sin {}^2/_n\,R)}$

472) $a\,c = (b\,o + o\,f + f\,b) \dfrac{\tan {}^2/_n\,R}{1 + \sin {}^2/_n\,R}$

473) $a\,b = (b\,o + o\,f + f\,b) \dfrac{\tan {}^2/_n\,R}{2\,(1 + \sin {}^2/_n\,R)}$

Hosted by Google

474) $2\pi r = \dfrac{(bo + of + fb).\pi}{1 + \sin {}^{2}/_{n} R}$

475) $bf + fd + db = (bo + of + fb)\dfrac{n . \sin {}^{2}/_{n} R}{1 + \sin {}^{2}/_{n} R}$

476) $ac + ce + ea = (bo + of + fb)\dfrac{n . \tan {}^{2}/_{n} R}{1 + \sin {}^{2}/_{n} R}$

477) $bo + of + fb = bo + of + fb$

478) $bi + io + ob = (bo + of + fb)\dfrac{(1 + \sin {}^{2}/_{n} R + \cos {}^{2}/_{n} R)}{2(1 + \sin {}^{2}/_{n} R)}$

479) $ac + co + oa = \dfrac{(bo + of + fb)}{\cos {}^{2}/_{n} R}$

480) $bo + oc + cb = (bo + of + fb)\dfrac{(1 + \sin {}^{2}/_{n} R + \cos {}^{2}/_{n} R)}{2(1 + \sin {}^{2}/_{n} R)\cos {}^{2}/_{n} R}$

481) $ab + bf + fa = (bo + of + fb)\dfrac{(1 + \cos {}^{2}/_{n} R)\tan {}^{2}/_{n} R}{1 + \sin {}^{2}/_{n} R}$

482) $ab + bi + ia = (bo + of + fb)\dfrac{(1 + \sin {}^{2}/_{n} R + \cos {}^{2}/_{n} R)}{2(1 + \sin {}^{2}/_{n} R)\cot {}^{2}/_{n} R}$

483) $bhf + fo + ob = (bo + of + fb)\dfrac{(\pi + n)}{n(1 + \sin {}^{2}/_{n} R)}$

484) $bhf + fb = (bo + of + fb)\dfrac{(\pi + n . \sin {}^{2}/_{n} R)}{n(1 + \sin {}^{2}/_{n} R)}$

485) $ab + bhf + fa = (bo + of + fb)\dfrac{(\pi + n . \tan {}^{2}/_{n} R)}{n(1 + \sin {}^{2}/_{n} R)}$

486) $ab + bo + of + fa = (bo + of + fb)\dfrac{(1 + \tan {}^{2}/_{n} R)}{1 + \sin {}^{2}/_{n} R}$

487) $\triangle bof = (bo + of + fb)^2 . \dfrac{\sin {}^{2}/_{n} R . \cos {}^{2}/_{n} R}{2(1 + \sin {}^{2}/_{n} R)}$

488) $\triangle bfd = (bo + of + fb)^2 \dfrac{n . \sin {}^{2}/_{n} R . \cos {}^{2}/_{n} R}{2(1 + \sin {}^{2}/_{n} R)}$

489) $\triangle aco = (bo + of + fb)^2 \dfrac{\tan {}^{2}/_{n} R}{4(1 + \sin {}^{2}/_{n} R)^2}$

490) $\triangle ace = (bo + of + fb)^2 \dfrac{n . \tan {}^{2}/_{n} R}{4(1 + \sin {}^{2}/_{n} R)^2}$

491) $bofh = \dfrac{(bo + of + fb)^2 . \pi}{4n(1 + \sin {}^{2}/_{n} R)^2}$ **492)** $\pi r^2 = \dfrac{(bo + of + fb)^2 . \pi}{4(1 + \sin {}^{2}/_{n} R)^2}$

493) $bhfi = (bo + of + fb)^2 \dfrac{(\pi - n . \sin {}^{2}/_{n} R . \cos {}^{2}/_{n} R)}{4n(1 + \sin {}^{2}/_{n} R)^2}$

Hosted by Google

494) $\mathrm{b\,h\,f\,a} = (\mathrm{b\,o} + \mathrm{o\,f} + \mathrm{f\,b})^2 \dfrac{(n \cdot \tan {}^2/_n\,R - \pi)}{4\,(1 + \sin {}^2/_n\,R)^2}$

495) $\triangle\,\mathrm{b\,a\,f} = (\mathrm{b\,o} + \mathrm{o\,f} + \mathrm{f\,b})^2 \cdot \dfrac{\sin {}^2/_n\,R \tan {}^2/_n\,R}{4\,(1 + \sin {}^2/_n\,R)^2}$

---

496) $\mathrm{b\,f} = (\mathrm{b\,i} + \mathrm{i\,o} + \mathrm{o\,b}) \dfrac{2 \sin {}^2/_n\,R}{1 + \sin {}^2/_n\,R + \cos {}^2/_n\,R}$

497) $\mathrm{b\,i} = (\mathrm{b\,i} + \mathrm{i\,o} + \mathrm{o\,b}) \dfrac{\sin {}^2/_n\,R}{1 + \sin {}^2/_n R + \cos {}^2/_n\,R}$

498) $\mathrm{b\,o} = \dfrac{(\mathrm{b\,i} + \mathrm{i\,o} + \mathrm{o\,b})}{1 + \sin {}^2/_n\,R + \cos {}^2/_n\,R}$

499) $\mathrm{i\,o} = \dfrac{(\mathrm{b\,i} + \mathrm{i\,o} + \mathrm{o\,b}) \cos {}^2/_n\,R}{1 + \sin {}^2/_n\,R + \cos {}^2/_n\,R}$

500) $\mathrm{a\,o} = \dfrac{(\mathrm{b\,i} + \mathrm{i\,o} + \mathrm{o\,b})}{(1 + \sin {}^2/_n\,R + \cos {}^2/_n\,R) \cos {}^2/_n\,R}$

501) $\mathrm{a\,i} = (\mathrm{b\,i} + \mathrm{i\,o} + \mathrm{o\,b}) \dfrac{\sin {}^2/_n\,R \cdot \tan {}^2/_n\,R}{1 + \sin {}^2/_n\,R + \cos {}^2/_n\,R}$

502) $\mathrm{a\,h} = \dfrac{(\mathrm{b\,i} + \mathrm{i\,o} + \mathrm{o\,b})(1 - \cos {}^2/_n\,R)}{(1 + \sin {}^2/_n\,R + \cos {}^2/_n\,R) \cos {}^2/_n\,R}$

503) $\mathrm{h\,i} = \dfrac{(\mathrm{b\,i} + \mathrm{i\,o} + \mathrm{o\,b})(1 - \cos {}^2/_n\,R)}{1 + \sin {}^2/_n\,R + \cos {}^2/_n\,R}$

504) $\mathrm{b\,h\,f} = \dfrac{(\mathrm{b\,i} + \mathrm{i\,o} + \mathrm{o\,b}) \cdot 2\,\pi}{n\,(1 + \sin {}^2/_n\,R + \cos {}^2/_n\,R)}$

505) $\mathrm{a\,c} = \dfrac{(\mathrm{b\,i} + \mathrm{i\,o} + \mathrm{o\,b})\,2 \tan {}^2/_n\,R}{1 + \sin {}^2/_n\,R + \cos {}^2/_n\,R}$

506) $\mathrm{a\,b} = \dfrac{(\mathrm{b\,i} + \mathrm{i\,o} + \mathrm{o\,b}) \tan {}^2/_n\,R}{1 + \sin {}^2/_n\,R + \cos {}^2/_n\,R}$

507) $2\,\pi\,\mathrm{r} = \dfrac{(\mathrm{b\,i} + \mathrm{i\,o} + \mathrm{o\,b})\,2\,\pi}{1 + \sin {}^2/_n\,R + \cos {}^2/_n\,R}$

508) $\mathrm{b\,f} + \mathrm{f\,d} + \mathrm{d\,b} = \dfrac{(\mathrm{b\,i} + \mathrm{i\,o} + \mathrm{o\,b})\,2\,n \cdot \sin {}^2/_n\,R}{1 + \sin {}^2/_n\,R + \cos {}^2/_n\,R}$

509) $\mathrm{a\,c} + \mathrm{c\,e} + \mathrm{e\,a} = \dfrac{(\mathrm{b\,i} + \mathrm{i\,o} + \mathrm{o\,b})\,2\,n \cdot \tan {}^2/_n\,R}{1 + \sin {}^2/_n\,R + \cos {}^2/_n\,R}$

510) $\mathrm{b\,o} + \mathrm{o\,f} + \mathrm{f\,b} = \dfrac{(\mathrm{b\,i} + \mathrm{i\,o} + \mathrm{o\,b})\,2\,(1 + \sin {}^2/_n\,R)}{1 + \sin {}^2/_n\,R + \cos {}^2/_n\,R}$

511) $\mathrm{b\,i} + \mathrm{i\,o} + \mathrm{o\,b} = \mathrm{b\,i} + \mathrm{i\,o} + \mathrm{o\,b}$

512) $\mathrm{a\,c} + \mathrm{c\,o} + \mathrm{o\,a} = \dfrac{(\mathrm{b\,i} + \mathrm{i\,o} + \mathrm{o\,b})\,2\,(1 + \sin {}^2/_n\,R)}{(1 + \sin {}^2/_n\,R + \cos {}^2/_n\,R) \cos {}^2/_n\,R}$

Hosted by Google

513) $b\,o + o\,c + c\,b = \dfrac{(b\,i + i\,o + o\,b)}{\cos {}^{2}/_{n}\,R}$

514) $a\,b + b\,f + f\,a = \dfrac{(b\,i + i\,o + o\,b)\,2\,(1 + \cos {}^{2}/_{n}\,R)}{(1 + \sin {}^{2}/_{n}\,R + \cos {}^{2}/_{n}\,R)\cot {}^{2}/_{n}\,R}$

515) $a\,b + b\,i + i\,a = (b\,i + i\,o + o\,b)\tan {}^{2}/_{n}\,R$

516) $b\,h\,f + f\,o + o\,b = \dfrac{(b\,i + i\,o + o\,b)\,2\,(n + \pi)}{n\,(1 + \sin {}^{2}/_{n}\,R + \cos {}^{2}/_{n}R)}$

517) $b\,h\,f + f\,b = \dfrac{(b\,i + i\,o + o\,b)\,2\,(n\,.\,\sin {}^{2}/_{n}\,R + \pi)}{n\,(1 + \sin {}^{2}/_{n}\,R + \cos {}^{2}/_{n}\,R)}$

518) $a\,b + b\,h\,f + f\,a = \dfrac{(b\,i + i\,o + o\,b)\,2\,(\pi + n\,.\tan {}^{2}/_{n}\,R)}{n\,(1 + \sin {}^{2}/_{n}\,R + \cos {}^{2}/_{n}\,R)}$

519) $a\,b + b\,o + o\,f + f\,a = \dfrac{(b\,i + i\,o + o\,b)\,2\,(1 + \tan {}^{2}/_{n}\,R)}{1 + \sin {}^{2}/_{n}\,R + \cos {}^{2}/_{n}\,R}$

520) $\triangle\,b\,o\,f = \dfrac{(b\,i + i\,o + o\,b)^{2}\sin {}^{2}/_{n}\,R\,.\cos {}^{2}/_{n}\,R}{(1 + \sin {}^{2}/_{n}\,R + \cos {}^{2}/_{n}\,R)^{2}}$

521) $\triangle\,b\,f\,d = \dfrac{(b\,i + i\,o + o\,b)^{2}\,n\,.\sin {}^{2}/_{n}\,R\,.\cos {}^{2}/_{n}\,R}{(1 + \sin {}^{2}/_{n}\,R + \cos {}^{2}/_{n}\,R)^{2}}$

522) $\triangle\,a\,c\,o = \dfrac{(b\,i + i\,o + o\,b)^{2}\tan {}^{2}/_{n}\,R}{(1 + \sin {}^{2}/_{n}\,R + \cos {}^{2}/_{n}\,R)^{2}}$

523) $\triangle\,a\,c\,e = \dfrac{(b\,i + i\,o + o\,b)^{2}\,n\,.\tan {}^{2}/_{n}\,R}{(1 + \sin {}^{2}/_{n}\,R + \cos {}^{2}/_{n}\,R)^{2}}$

524) $b\,o\,f\,h = \dfrac{(b\,i + i\,o + o\,b)^{2}\,\pi}{n\,(1 + \sin {}^{2}/_{n}\,R + \cos {}^{2}/_{n}\,R)^{2}}$

525) $\pi\,r^{2} = \dfrac{(b\,i + i\,o + o\,b)^{2}\,\pi}{(1 + \sin {}^{2}/_{n}\,R + \cos {}^{2}/_{n}R)^{2}}$

526) $b\,h\,f\,i = \dfrac{(b\,i + i\,o + o\,b)^{2}\,(\pi - n\,.\sin {}^{2}/_{n}\,R\,.\cos {}^{2}/_{n}\,R)}{n\,(1 + \sin {}^{2}/_{n}\,R + \cos {}^{2}/_{n}\,R)^{2}}$

527) $b\,h\,f\,a = \dfrac{(b\,i + i\,o + o\,b)^{2}\,(n\,.\tan {}^{2}/_{n}\,R - \pi)}{n\,(1 + \sin {}^{2}/_{n}\,R + \cos {}^{2}/_{n}\,R)^{2}}$

528) $\triangle\,b\,a\,f = \dfrac{(b\,i + i\,o + o\,b)^{2}\sin {}^{2}/_{n}\,R\,.\tan {}^{2}/_{n}\,R}{(1 + \sin {}^{2}/_{n}\,R + \cos {}^{2}/_{n}\,R)^{2}}$

---

529) $b\,f = (a\,c + c\,o + o\,a)\dfrac{\sin {}^{2}/_{n}\,R\,.\cos {}^{2}/_{n}\,R}{1 + \sin {}^{2}/_{n}\,R}$

530) $b\,i = (a\,c + c\,o + o\,a)\dfrac{\sin {}^{2}/_{n}\,R\,.\cos {}^{2}/_{n}\,R}{2\,(1 + \sin {}^{2}/_{n}\,R)}$

Hosted by Google

531) $b\,o = (a\,c + c\,o + o\,a)\dfrac{\cos {}^{2}/_{n}\,R}{2\,(1 + \sin {}^{2}/_{n}\,R)}$

532) $i\,o = (a\,c + c\,o + o\,a)\dfrac{\cos^{2} {}^{2}/_{n}\,R}{2\,(1 + \sin {}^{2}/_{n}\,R)}$

533) $a\,o = \dfrac{(a\,c + c\,o + o\,a)}{2\,(1 + \sin {}^{2}/_{n}\,R)}$

534) $a\,i = (a\,c + c\,o + o\,a)\dfrac{\sin^{2} {}^{2}/_{n}\,R}{2\,(1 + \sin {}^{2}/_{n}\,R)}$

535) $a\,h = (a\,c + c\,o + o\,a)\dfrac{(1 - \cos {}^{2}/_{n}\,R)}{2\,(1 + \sin {}^{2}/_{n}\,R)}$

536) $h\,i = (a\,c + c\,o + o\,a)\dfrac{\cos {}^{2}/_{n}\,R\,(1 - \cos {}^{2}/_{n}\,R)}{2\,(1 + \sin {}^{2}/_{n}\,R)}$

537) $b\,h\,f = (a\,c + c\,o + o\,a)\dfrac{\pi\,.\cos {}^{2}/_{n}\,R}{n\,(1 + \sin {}^{2}/_{n}\,R)}$

538) $a\,c = (a\,c + c\,o + o\,a)\dfrac{\sin {}^{2}/_{n}\,R}{1 + \sin {}^{2}/_{n}\,R}$

539) $a\,b = (a\,c + c\,o + o\,a)\dfrac{\sin {}^{2}/_{n}\,R}{2\,(1 + \sin {}^{2}/_{n}\,R)}$

540) $2\,\pi\,r = (a\,c + c\,o + o\,a)\dfrac{\pi\,.\cos {}^{2}/_{n}\,R}{1 + \sin {}^{2}/_{n}\,R}$

541) $b\,f + f\,d + d\,b = (a\,c + c\,o + o\,a)\dfrac{n\,.\sin {}^{2}/_{n}\,R\,.\cos {}^{2}/_{n}\,R}{1 + \sin {}^{2}/_{n}\,R}$

542) $a\,c + c\,e + e\,a = (a\,c + c\,o + o\,a)\dfrac{n\,.\sin {}^{2}/_{n}\,R}{1 + \sin {}^{2}/_{n}\,R}$

543) $b\,o + o\,f + f\,b = (a\,c + c\,o + o\,a)\cos {}^{2}/_{n}\,R$

544) $b\,i + i\,o + o\,b = (a\,c + c\,o + o\,a)\dfrac{(1 + \sin {}^{2}/_{n}\,R + \cos {}^{2}/_{n}\,R)\cos {}^{2}/_{n}\,R}{2\,(1 + \sin {}^{2}/_{n}\,R)}$

545) $a\,c + c\,o + o\,a = a\,c + c\,o + o\,a$

546) $b\,o + o\,c + c\,b = (a\,c + c\,o + o\,a)\dfrac{(1 + \sin {}^{2}/_{n}\,R + \cos {}^{2}/_{n})}{2\,(1 + \sin {}^{2}/_{n}\,R)}$

547) $a\,b + b\,f + f\,a = (a\,c + c\,o + o\,a)\dfrac{\sin {}^{2}/_{n}\,R\,(1 + \cos {}^{2}/_{n}\,R)}{1 + \sin {}^{2}/_{n}\,R}$

548) $a\,b + b\,i + i\,a = (a\,c + c\,o + o\,a)\dfrac{\sin {}^{2}/_{n}\,R\,(1 + \sin {}^{2}/_{n}\,R + \cos {}^{2}/_{n}R)}{2\,(1 + \sin {}^{2}/_{n}\,R)}$

549) $b\,h\,f + f\,o + o\,b = (a\,c + c\,o + o\,a)\dfrac{\cos {}^{2}/_{n}\,R\,(\pi + n)}{n\,(1 + \sin {}^{2}/_{n}\,R)}$

550) $b\,h\,f + f\,b = (a\,c + c\,o + o\,a)\dfrac{(\pi + n\,.\,\cos {}^{2}/_{n}\,R)\cos {}^{2}/_{n}\,R}{n\,(1 + \sin {}^{2}/_{n}\,R)}$

Hosted by Google

551) $ab + bhf + fa = (ac + co + oa)\dfrac{(n \cdot \sin {}^{2}/_{n}R + \pi \cdot \cos {}^{2}/_{n}R)}{n(1 + \sin {}^{2}/_{n}R)}$

552) $ab + bo + of + fa = (ac + co + oa)\dfrac{(\sin {}^{2}/_{n}R + \cos {}^{2}/_{n}R)}{1 + \sin {}^{2}/_{n}R}$

553) $\triangle bof = (ac + co + oa)^2 \dfrac{\sin {}^{2}/_{n}R \cdot \cos {}^{2}/_{n}\overline{R}^{3}}{4(1 + \sin {}^{2}/_{n}R)^2}$

554) $\triangle bfd = (ac + co + oa)^2 \dfrac{n \cdot \sin {}^{2}/_{n}R \cdot \cos {}^{2}/_{n}\overline{R}^{3}}{4(1 + \sin {}^{2}/_{n}R)^2}$

555) $\triangle aco = (ac + co + oa)^2 \dfrac{\sin {}^{2}/_{n}R \cdot \cos {}^{2}/_{n}R}{4(1 + \sin {}^{2}/_{n}R)^2}$

556) $\triangle ace = (ac + co + oa)^2 \dfrac{n \cdot \sin {}^{2}/_{n}R \cdot \cos {}^{2}/_{n}R}{4(1 + \sin {}^{2}/_{n}R)^2}$

557) $bofh = (ac + co + oa)^2 \dfrac{\pi \cdot \cos {}^{2}/_{n}\overline{R}^{2}}{4n(1 + \sin {}^{2}/_{n}R)^2}$

558) $\pi r^2 = (ac + co + oa)^2 \dfrac{\pi \cdot \cos {}^{2}/_{n}\overline{R}^{2}}{4(1 + \sin {}^{2}/_{n}R)^2}$

559) $bhfi = (ac + co + oa)^2 \dfrac{\cos {}^{2}/_{n}\overline{R}^{2}(\pi - n \cdot \sin {}^{2}/_{n}R \cos {}^{2}/_{n}R)}{4n(1 + \sin {}^{2}/_{n}R)^2}$

560) $bhfa = (ac + co + oa)^2 \dfrac{\cos {}^{2}/_{n}R(n \cdot \sin {}^{2}/_{n}R - \pi \cdot \cos {}^{2}/_{n}R)}{4n(1 + \sin {}^{2}/_{n}R)^2}$

561) $\triangle baf = (ac + co + oa)^2 \dfrac{\sin {}^{2}/_{n}\overline{R}^{3} \cdot \cos {}^{2}/_{n}R}{4(1 + \sin {}^{2}/_{n}R)^2}$

---

562) $bf = \dfrac{(bo + oc + cb)\sin {}^{4}/_{n}R}{1 + \sin {}^{2}/_{n}R + \cos {}^{2}/_{n}R}$

563) $bi = \dfrac{(bo + oc + cb)\sin {}^{2}/_{n}R \cdot \cos {}^{2}/_{n}R}{1 + \sin {}^{2}/_{n}R + \cos {}^{2}/_{n}R}$

564) $bo = \dfrac{(bo + oc + cb)\cos {}^{2}/_{n}R}{1 + \sin {}^{2}/_{n}R + \cos {}^{2}/_{n}R}$

565) $io = \dfrac{(bo + oc + cb)\cos {}^{2}/_{n}\overline{R}^{2}}{1 + \sin {}^{2}/_{n}R + \cos {}^{2}/_{n}R}$

566) $ao = \dfrac{(bo + oc + cb)}{1 + \sin {}^{2}/_{n}R + \cos {}^{2}/_{n}R}$

Hosted by Google

567) $a\,i = \dfrac{(b\,o + o\,c + c\,b)\sin^{2}{}^{2}/_{n}\,R}{1 + \sin {}^{2}/_{n}\,R + \cos {}^{2}/_{n}\,R}$

568) $a\,h = \dfrac{(b\,o + o\,c + c\,b)\,(1 - \cos {}^{2}/_{n}\,R)}{1 + \sin {}^{2}/_{n}\,R + \cos {}^{2}/_{n}\,R}$

569) $h\,i = \dfrac{(b\,o + o\,c + c\,b)\cos {}^{2}/_{n}\,R\,(1 - \cos {}^{2}/_{n}\,R)}{1 + \sin {}^{2}/_{n}\,R + \cos {}^{2}/_{n}\,R}$

570) $b\,h\,f = \dfrac{(b\,o + o\,c + c\,b)\,2\,\pi\,.\cos {}^{2}/_{n}\,R}{n\,(1 + \sin {}^{2}/_{n}\,R + \cos {}^{2}/_{n}\,R)}$

571) $a\,c = \dfrac{(b\,o + o\,c + c\,b)\,2\sin {}^{2}/_{n}\,R}{1 + \sin {}^{2}{}_{n}\,R + \cos {}^{2}/_{n}\,R}$

572) $a\,b = \dfrac{(b\,o + o\,c + c\,b)\sin {}^{2}/_{n}\,R}{1 + \sin {}^{2}/_{n}\,R + \cos {}^{2}/_{n}\,R}$

573) $2\,\pi\,r = \dfrac{(b\,o + o\,c + c\,b)\,2\,\pi\,.\cos {}^{2}/_{n}\,R}{1 + \sin {}^{2}/_{n}\,R + \cos {}^{2}/_{n}\,R}$

574) $b\,f + f\,d + d\,b = \dfrac{(b\,o + o\,c + c\,b)\,n\,.\sin {}^{4}/_{n}\,R}{1 + \sin {}^{2}/_{n}\,R + \cos {}^{2}/_{n}\,R}$

575) $a\,c + c\,e + e\,a = \dfrac{(b\,o + o\,c + c\,b)\,2\,n\,.\sin {}^{2}/_{n}\,R}{1 + \sin {}^{2}/_{n}\,R + \cos {}^{2}/_{n}\,R}$

576) $b\,o + o\,f + f\,b = \dfrac{(b\,o + o\,c + c\,b)\,2(1 + \sin {}^{2}/_{n}\,R)\cos {}^{2}/_{n}\,R)}{1 + \sin {}^{2}/_{n}\,R + \cos {}^{2}/_{n}\,R}$

577) $b\,i + i\,o + o\,b = (b\,o + o\,c + c\,b)\cos {}^{2}/_{n}\,R$

578) $a\,c + c\,o + o\,a = \dfrac{(b\,o + o\,c + c\,b)\,2\,(1 + \sin {}^{2}/_{n}\,R)}{1 + \sin {}^{2}/_{n}\,R + \cos {}^{2}/_{n}\,R}$

579) $b\,o + o\,c + c\,b = b\,o + o\,c + c\,b$

580) $a\,b + b\,f + f\,a = (b\,o + o\,c + c\,b)\,\dfrac{2\sin {}^{2}/_{n}\,R\,(1 + \cos {}^{2}/_{n})}{1 + \sin {}^{2}/_{n}\,R + \cos {}^{2}/_{n}R}$

581) $a\,b + b\,i + i\,a = (b\,o + o\,c + c\,b)\sin {}^{2}/_{n}\,R$

582) $b\,h\,f + f\,o + o\,b = \dfrac{(b\,o + o\,c + c\,b)\,2\cos {}^{2}/_{n}\,R\,(n + \pi)}{n\,(1 + \sin {}^{2}/_{n}\,R + \cos {}^{2}/_{n}\,R)}$

583) $b\,h\,f + f\,b = \dfrac{(b\,o + o\,c + c\,b)\,2\cos {}^{2}/_{n}\,R\,(\pi + n\,.\sin {}^{2}/_{n}\,R)}{n\,(1 + \sin {}^{2}/_{n}\,R + \cos {}^{2}/_{n}\,R)}$

584) $a\,b + b\,h\,f + f\,a = \dfrac{(b\,o + o\,c + c\,b)\,2\,(n\,.\sin {}^{2}/_{n}\,R + \pi\,.\cos {}^{2}/_{n}\,R)}{n\,(1 + \sin {}^{2}/_{n}\,R + \cos {}^{2}/_{n}\,R)}$

585) $a\,b + b\,o + o\,f + f\,a = \dfrac{(b\,o + o\,c + c\,b)\,2\,(\sin {}^{2}/_{n}\,R + \cos {}^{2}/_{n}\,R)}{1 + \sin {}^{2}/_{n}\,R + \cos {}^{2}/_{n}\,R}$

586) $\triangle\,b\,o\,f = \dfrac{(b\,o + o\,c + c\,b)^{2}\sin {}^{2}/_{n}\,R\,.\cos {}^{2}/_{n}\,R}{(1 + \sin {}^{2}/_{n}\,R + \cos {}^{2}/_{n}\,R)^{2}}$

Hosted by Google

587) $\triangle bfd = \dfrac{(bo + oc + cb)^2\, n \,.\, \sin {}^2/_n R \,.\, \cos \overline{{}^2/_n R}^{\,3}}{(1 + \sin {}^2/_n R + \cos {}^2/_n R)^2}$

588) $\triangle aco = \dfrac{(bo + oc + cb)^2 \sin {}^2/_n R \,.\, \cos {}^2/_n R}{(1 + \sin {}^2/_n R + \cos {}^2/_n R)^2}$

589) $\triangle ace = \dfrac{(bo + oc + cb)^2\, n \,.\, \sin {}^2/_n R \,.\, \cos {}^2/_n R}{(1 + \sin {}^2/_n R + \cos {}^2/_n R)^2}$

590) $bofh = \dfrac{(bo + oc + cb)^2\, \pi \cos \overline{{}^2/_n R}^{\,2}}{n\,(1 + \sin {}^2/_n R + \cos {}^2/_n R)^2}$

591) $\pi r^2 = \dfrac{(bo + oc + cb)^2 \,.\, \pi \,.\, \cos \overline{{}^2/_n R}^{\,2}}{(1 + \sin {}^2/_n R + \cos {}^2/_n R)^2}$

592) $bhfi = \dfrac{(bo + oc + cb)^2 \cos \overline{{}^2/_n R}^{\,2} (\pi - n \,.\, \sin {}^2/_n R \,.\, \cos {}^2/_n R)}{n\,(1 + \sin {}^2/_n R + \cos {}^2/_n R)^2}$

593) $bhfa = \dfrac{(bo + oc + cb)^2 \cos {}^2/_n R (n \,.\, \sin {}^2/_n R - \pi \,.\, \cos {}^2/_n R)}{n\,(1 + \sin {}^2/_n R + \cos {}^2/_n R)^2}$

594) $\triangle baf = \dfrac{(bo + oc + cb)^2 \sin \overline{{}^2/_n R}^{\,3} \,.\, \cos {}^2/_n R}{(1 + \sin {}^2/_n R + \cos {}^2/_n R)^2}$

---

595) $bf = (ab + bf + fa) \dfrac{\cos {}^2/_n R}{1 + \cos {}^2/_n R}$

596) $bi = (ab + bf + fa) \dfrac{\cos {}^2/_n R}{2\,(1 + \cos {}^2/_n R)}$

597) $bo = (ab + bf + fa) \dfrac{\cot {}^2/_n R}{2\,(1 + \cos {}^2/_n R)}$

598) $io = (ab + bf + fa) \dfrac{\cot {}^2/_n R \,.\, \cos {}^2/_n R}{2\,(1 + \cos {}^2/_n R)}$

599) $ao = \dfrac{(ab + bf + fa)}{2 \sin {}^2/_n R\,(1 + \cos {}^2/_n R)}$

600) $ai = (ab + bf + fa) \dfrac{\sin {}^2/_n R}{2\,(1 + \cos {}^2/_n R)}$

601) $ah = (ab + bf + fa) \dfrac{(1 - \cos {}^2/_n R)}{2 \sin {}^2/_n R\,(1 + \cos {}^2/_n R)}$

602) $hi = (ab + bf + fa) \dfrac{\cot {}^2/_n R\,(1 - \cos {}^2/_n R)}{2\,(1 + \cos {}^2/_n R)}$

603) $bhf = (ab + bf + fa) \,.\, \dfrac{\pi \,.\, \cot {}^2/_n R}{n\,(1 + \cos {}^2/_n R)}$

Hosted by Google

604) $a\,c = \dfrac{(a\,b + b\,f + f\,a)}{1 + \cos {}^{2}/_{n}\,R}$ **605)** $a\,b = \dfrac{(a\,b + b\,f + f\,a)}{2\,(1 + \cos {}^{2}/_{n}\,R)}$

606) $2\,\pi\,r = (a\,b + b\,f + f\,a)\,\dfrac{\pi\,.\,\cot {}^{2}/_{n}\,R}{1 + \cos {}^{2}/_{n}\,R}$

607) $b\,f + f\,d + d\,b = (a\,b + b\,f + f\,a)\,\dfrac{n\,.\cos {}^{2}/_{n}\,R}{1 + \cos {}^{2}/_{n}\,R}$

608) $a\,c + c\,e + e\,a = \dfrac{(a\,b + b\,f + f\,a)\,.\,n}{1 + \cos {}^{2}/_{n}\,R}$

609) $b\,o + o\,f + f\,b = (a\,b + b\,f + f\,a)\,\dfrac{\cot {}^{2}/_{n}\,R\,(1 + \sin {}^{2}/_{n}\,R)}{1 + \cos {}^{2}/_{n}\,R}$

610) $b\,i + i\,o + o\,b = (a\,b + b\,f + f\,a)\,\dfrac{(1 + \sin {}^{2}/_{n}\,R + \cos {}^{2}/_{n}\,R)}{(1 + \cos {}^{2}/_{n}\,R)\tan {}^{2}/_{n}\,R}$

611) $a\,c + c\,o + o\,a = \dfrac{(a\,b + b\,f + f\,a)\,(1 + \sin {}^{2}/_{n}\,R)}{\sin {}^{2}/_{n}\,R\,(1 + \cos {}^{2}/_{n}\,R)}$

612) $b\,o + o\,c + c\,b = (a\,b + b\,f + f\,a)\,\dfrac{(1 + \sin {}^{2}/_{n}\,R + \cos {}^{2}/_{n}\,R)}{2\sin {}^{2}/_{n}\,R\,(1 + \cos {}^{2}/_{n}\,R)}$

613) $a\,b + b\,f + f\,a = a\,b + b\,f + f\,a$

614) $a\,b + b\,i + i\,a = (a\,b + b\,f + f\,a)\,\dfrac{(1 + \sin {}^{2}/_{n}\,R + \cos {}^{2}/_{n}\,R)}{2\,(1 + \cos {}^{2}/_{n}\,R)}$

615) $b\,h\,f + f\,o + o\,b = (a\,b + b\,f + f\,a)\,\dfrac{\cot {}^{2}/_{n}\,R\,(\pi + n)}{n\,(1 + \cos {}^{2}/_{n}R)}$

616) $b\,h\,f + f\,b = (a\,b + b\,f + f\,a)\,\dfrac{(\pi\,.\cot {}^{2}/_{n}\,R + n\,.\cos {}^{2}/_{n}\,R)}{n\,(1 + \cos {}^{2}/_{n}\,R)}$

617) $a\,b + b\,h\,f + f\,a = (a\,b + b\,f + f\,a)\,\dfrac{(\pi\,.\cot {}^{2}/_{n}\,R + n)}{n\,(1 + \cos {}^{2}/_{n}\,R)}$

618) $a\,b + b\,o + o\,f + f\,a = (a\,b + b\,f + f\,a)\,\dfrac{(1 + \cot {}^{2}/_{n}\,R)}{1 + \cos {}^{2}/_{n}\,R}$

619) $\triangle\,b\,o\,f = (a\,b + b\,f + f\,a)^{2}\,\dfrac{\cos {}^{2}/_{n}\,\overline{R}^{2}\,.\cot {}^{2}/_{n}\,R}{4\,(1 + \cos {}^{2}/_{n}\,R)^{2}}$

620) $\triangle\,b\,f\,d = (a\,b + b\,f + f\,a)^{2}\,.\,\dfrac{n\,.\cos {}^{2}/_{n}\,\overline{R}^{2}\,.\cot {}^{2}/_{n}\,R}{4\,(1 + \cos {}^{2}/_{n}\,R)^{2}}$

621) $\triangle\,a\,c\,o = (a\,b + b\,f + f\,a)^{2}\,\dfrac{\cot {}^{2}/_{n}\,R}{4\,(1 + \cos {}^{2}/_{n}\,R)^{2}}$

622) $\triangle\,a\,c\,e = (a\,b + b\,f + f\,a)^{2}\,\dfrac{n\,.\cot {}^{2}/_{n}\,R}{4\,(1 + \cos {}^{2}/_{n}\,R)^{2}}$

623) $b\,o\,f\,h = (a\,b + b\,f + f\,a)^{2}\,\dfrac{\pi\,.\cot {}^{2}/_{n}\,\overline{R}^{2}}{4\,n\,(1 + \cos {}^{2}/_{n}\,R)^{2}}$

Hosted by Google

624) $\pi r^2 = (a b + b f + f a)^2 \dfrac{\pi \,.\, \overline{\cot {}^2/_n R}^2}{4 (1 + \cos {}^2/_n R)^2}$

625) $b h f i = (a b + b f + f a)^2 \dfrac{(\pi - n \,.\, \sin {}^2/_n R \,.\, \cos {}^2/_n R)}{4 n \,.\, \overline{\tan {}^2/_n R}^2 (1 + \cos {}^2/_n)^2}$

626) $b h f a = (a b + b f + f a)^2 \dfrac{(n - \pi \,.\, \cot {}^2/_n R) \cot {}^2/_n R}{4 n (1 + \cos {}^2/_n R)^2}$

627) $\triangle b a f = (a b + b f + f a)^2 \dfrac{\sin {}^2/_n R \,.\, \cos {}^2/_n R}{4 (1 + \cos {}^2/_n R)^2}$

---

628) $b f = \dfrac{(a b + b i + i a) 2 \cos {}^2/_n R}{1 + \sin {}^2/_n R + \cos {}^2/_n R}$

629) $b i = \dfrac{(a b + b i + i a) \cos {}^2/_n R}{1 + \sin {}^2/_n R + \cos {}^2/_n R}$

630) $b o = \dfrac{(a b + b i + i a) \cot {}^2/_n R}{1 + \sin {}^2/_n R + \cos {}^2/_n R}$

631) $i o = \dfrac{(a b + b i + i a) \cos {}^2/_n R \,.\, \cot {}^2/_n R}{1 + \sin {}^2/_n R + \cos {}^2/_n R}$

632) $a o = \dfrac{(a b + b i + i a)}{\sin {}^2/_n R (1 + \sin {}^2/_n R + \cos {}^2/_n R)}$

633) $a i = \dfrac{(a b + b i + i a) \sin {}^2/_n R}{1 + \sin {}^2/_n R + \cos {}^2/_n R}$

634) $a h = \dfrac{(a b + b i + i a) (1 - \cos {}^2/_n R)}{\sin {}^2/_n R (1 + \sin {}^2/_n R + \cos {}^2/_n R)}$

635) $h i = (a b + b i + i a) \dfrac{\cot {}^2/_n R (1 - \cos {}^2/_n R)}{1 + \sin {}^2/_n R + \cos {}^2/_n R}$

636) $b h f = \dfrac{(a b + b i + i a) 2 \pi \,.\, \cot {}^2/_n R}{n (1 + \sin {}^2/_n R + \cos {}^2/_n R)}$

637) $a c = \dfrac{(a b + b i + i a) \,.\, 2}{1 + \sin {}^2/_n R + \cos {}^2/_n R}$

638) $a b = \dfrac{(a b + b i + i a)}{1 + \sin {}^2/_n R + \cos {}^2/_n R}$

639) $2 \pi r = (a b + b i + i a) \dfrac{2 \pi \,.\, \cot {}^2/_n R}{1 + \sin {}^2/_n R + \cos {}^2/_n R}$

640) $b f + f d + d b = (a b + b i + i a) \dfrac{2 n \,.\, \cos {}^2/_n R}{1 + \sin {}^2/_n R + \cos {}^2/_n R}$

Hosted by Google

641) $ac + ce + ea = \dfrac{(ab + bi + ia) \cdot 2n}{1 + \sin {}^{2}/_{n}R + \cos {}^{2}/_{n}R}$

642) $bo + of + fb = (ab + bi + ia) \dfrac{2 \cot {}^{2}/_{n}R\,(1 + \sin {}^{2}/_{n}R)}{1 + \sin {}^{2}/_{n}R + \cos {}^{2}/_{n}R}$

643) $bi + io + ob = (ab + bi + ia) \cot {}^{2}/_{n}R$

644) $ac + co + oa = \dfrac{(ab + bi + ia)\,2\,(1 + \sin {}^{2}/_{n}R)}{\sin {}^{2}/_{n}R\,(1 + \sin {}^{2}/_{n}R + \cos {}^{2}/_{n}R)}$

645) $bo + oc + cb = \dfrac{(ab + bi + ia)}{\sin {}^{2}/_{n}R}$

646) $ab + bf + fa = \dfrac{(ab + bi + ia)\,2\,(1 + \cos {}^{2}/_{n}R)}{1 + \sin {}^{2}/_{n}R + \cos {}^{2}/_{n}R}$

647) $ab + bi + ia = ab + bi + ia$

648) $bhf + fo + ob = \dfrac{(ab + bi + ia)\,2 \cot {}^{2}/_{n}R\,(\pi + n)}{n\,(1 + \sin {}^{2}/_{n}R + \cos {}^{2}/_{n}R)}$

649) $bhf + fb = (ab + bi + ia) \dfrac{2 \cot {}^{2}/_{n}R\,(\pi + n \,.\, \sin {}^{2}/_{n}R)}{n\,(1 + \sin {}^{2}/_{n}R + \cos {}^{2}/_{n}R)}$

650) $ab + bhf + fa = \dfrac{(ab + bi + ia)\,2\,(\pi \,.\, \cot {}^{2}/_{n}R + n)}{n\,(1 + \sin {}^{2}/_{n}R + \cos {}^{2}/_{n}R)}$

651) $ab + bo + of + fa = \dfrac{(ab + bi + ia)\,2\,(1 + \cot {}^{2}/_{n}R)}{1 + \sin {}^{2}/_{n}R + \cos {}^{2}/_{n}R}$

652) $\triangle bof = \dfrac{(b + bi + ia)^2 \cos \overline{{}^{2}/_{n}R}^{2} \,.\, \cot {}^{2}/_{n}R}{(1 + \sin {}^{2}/_{n}R + \cos {}^{2}/_{n}R)^2}$

653) $\triangle bfd = \dfrac{(ab + bi + ia)^2\, n \,.\, \cos \overline{{}^{2}/_{n}R}^{2} \,.\, \cot {}^{2}/_{n}R}{(1 + \sin {}^{2}/_{n}R + \cos {}^{2}/_{n}R)^2}$

654) $\triangle aco = \dfrac{(ab + bi + ia)^2 \cot {}^{2}/_{n}R}{(1 + \sin {}^{2}/_{n}R + \cos {}^{2}/_{n}R)^2}$

655) $\triangle ace = \dfrac{(ab + bi + ia)^2\, n \,.\, \cot {}^{2}/_{n}R}{(1 + \sin {}^{2}/_{n}R + \cos {}^{2}/_{n}R)^2}$

656) $bofh = \dfrac{(ab + bi + ia)^2 \,.\, \pi \,.\, \cot \overline{{}^{2}/_{n}R}^{2}}{n\,(1 + \sin {}^{2}/_{n}R + \cos {}^{2}/_{n}R)^2}$

657) $\pi r^2 = \dfrac{(ab + bi + ia)^2 \,.\, \pi \,.\, \cot \overline{{}^{2}/_{n}R}^{2}}{(1 + \sin {}^{2}/_{n}R + \cos {}^{2}/_{n}R)^2}$

658) $bhfi = \dfrac{(ab + bi + ia)^2\,(\pi - n \,.\, \sin {}^{2}/_{n}R \,.\, \cos {}^{2}/_{n}R)}{n \,.\, \tan \overline{{}^{2}/_{n}R}^{2}\,(1 + \sin {}^{2}/_{n}R + \cos {}^{2}/_{n}R)^2}$

659) $bhfa = \dfrac{(ab + bi + ia)^2\,(n - \pi \,.\, \cot {}^{2}/_{n}R)}{n \,.\, \tan {}^{2}/_{n}R\,(1 + \sin {}^{2}/_{n}R + \cos {}^{2}/_{n}R)^2}$

Hosted by Google

660) $\triangle\, b\,a\,f = \dfrac{(a\,b + b\,i + i\,a)^2 \sin {}^2/_n\,R \,.\, \cos {}^2/_n\,R}{(1 + \sin {}^2/_n\,R + \cos {}^2/_n\,R)^2}$

---

661) $b\,f = (b\,h\,f + f\,o + o\,b)\dfrac{n \,.\, \sin {}^2/_n R}{\pi + n}$

662) $b\,i = (b\,h\,f + f\,o + o\,b)\dfrac{n \,.\, \sin {}^2/_n R}{2\,(\pi + n)}$

663) $b\,o = (b\,h\,f + f\,o + o\,b) \,.\, \dfrac{n}{2\,(\pi + n)}$

664) $i\,o = (b\,h\,f + f\,o + o\,b)\dfrac{n \,.\, \cos {}^2/_n R}{2\,(\pi + n)}$ **665)** $a\,o = \dfrac{(b\,h\,f + f\,o + o\,b)\,n}{2\,(\pi + n)\cos {}^2/_n\,R}$

666) $a\,i = (b\,h\,f + f\,o + o\,b)\dfrac{n \,.\, \sin {}^2/_n\,R \,.\, \tan {}^2/_n\,R}{2\,(\pi + n)}$

667) $a\,h = (b\,h\,f + f\,o + o\,b)\dfrac{n\,(1 - \cos {}^2/_n\,R)}{2\,(\pi + n)\cos {}^2/_n\,R}$

668) $h\,i = (b\,h\,f + f\,o + o\,b)\dfrac{n\,(1 - \cos {}^2/_n\,R)}{2\,(\pi + n)}$

669) $b\,h\,f = (b\,h\,f + f\,o + o\,b)\dfrac{\pi}{\pi + n}$

670) $a\,c = (b\,f\,h + f\,o + o\,b)\dfrac{n \,.\, \tan {}^2/_n\,R}{\pi + n}$

671) $a\,b = (b\,h\,f + f\,o + o\,b)\dfrac{n \,.\, \tan {}^2/_n\,R}{2\,(\pi + n)}$

672) $2\,\pi\,r = (b\,h\,f + f\,o + o\,b)\dfrac{\pi \,.\, n}{\pi + n}$

673) $b\,f + f\,d + d\,b = (b\,h\,f + f\,o + o\,b)\dfrac{n^2 \,.\, \sin {}^2/_n\,R}{\pi + n}$

674) $a\,c + c\,e + e\,a = (b\,h\,f + f\,o + o\,b)\dfrac{n^2 \,.\, \tan {}^2/_n\,R}{\pi + n}$

675) $b\,o + o\,f + f\,b = (b\,h\,f + f\,o + o\,b)\dfrac{n\,(1 + \sin {}^2/_n\,R)}{\pi + n}$

676) $b\,i + i\,o + o\,b = (b\,h\,f + f\,o + o\,b)\dfrac{n\,(1 + \sin {}^2/_u\,R + \cos {}^2/_n\,R)}{2\,(\pi + n)}$

677) $a\,c + c\,o + o\,a = (b\,h\,f + f\,o + o\,b)\dfrac{n\,(1 + \sin {}^2/_n\,R)}{(\pi + n)\cos {}^2/_n\,R}$

678) $b\,o + o\,c + c\,b = (b\,h\,f + f\,o + o\,b)\dfrac{n\,(1 + \sin {}^2/_n\,R + \cos {}^2/_n\,R)}{2\,(\pi + n)\cos {}^2/_n\,R}$

Hosted by Google

679) $ab + bf + fa = (bhf + fo + ob)\dfrac{n \cdot \tan {}^{2}/_{n}\,R\,(1 + \cos {}^{2}/_{n}\,R)}{\pi + n}$

680) $ab + bi + ia = (bhf + fo + ob)\dfrac{n\,(1 + \sin {}^{2}/_{n}\,R + \cos {}^{2}/_{n}\,R)}{2\,(\pi + n)\cot {}^{2}/_{n}\,R}$

681) $bhf + fo + ob = bhf + fo + ob$

682) $bhf + fb = (bhf + fo + ob)\dfrac{(\pi + n \cdot \sin {}^{2}/_{n}\,R)}{\pi + n}$

683) $ab + bhf + fa = (bhf + fo + ob)\dfrac{(\pi + n \cdot \tan {}^{2}/_{n}\,R)}{\pi + n}$

684) $ab + bo + of + fa = (bhf + fo + ob)\dfrac{n\,(1 + \tan {}^{2}/_{n}\,R)}{\pi + n}$

685) $\triangle bof = (bhf + fo + ob)^{2}\dfrac{n^{2} \cdot \sin {}^{2}/_{n}\,R \cdot \cos {}^{2}/_{n}\,R}{4\,(\pi + n)^{2}}$

686) $\triangle bfd = (bhf + fo + ob)^{2}\dfrac{n^{3} \cdot \sin {}^{2}/_{n}\,R \cdot \cos {}^{2}/_{n}\,R}{4\,(\pi + n)^{2}}$

687) $\triangle aco = (bhf + fo + ob)^{2}\dfrac{n^{2} \cdot \tan {}^{2}/_{n}\,R}{4\,(\pi + n)^{2}}$

688) $\triangle ace = (bhf + fo + ob)^{2}\dfrac{n^{3} \cdot \tan {}^{2}/_{n}\,R}{4\,(\pi + n)^{2}}$

689) $bofh = (bhf + fo + ob)^{2}\dfrac{\pi \cdot n}{4\,(\pi + n)^{2}}$

690) $\pi\,r^{2} = (bhf + fo + ob)^{2}\dfrac{\pi \cdot n^{2}}{4\,(\pi + n)^{2}}$

691) $bhfi = (bhf + fo + ob)^{2}\dfrac{n\,(\pi - n \cdot \sin {}^{2}/_{n}\,R \cdot \cos {}^{2}/_{n}\,R)}{4\,(\pi + n)^{2}}$

692) $bhfa = (bhf + fo + ob)^{2}\dfrac{n\,(n \cdot \tan {}^{2}/_{n}\,R - \pi)}{4\,(\pi + n)^{2}}$

693) $\triangle baf = (bhf + fo + ob)^{2}\dfrac{n^{2} \cdot \sin^{2} {}^{2}/_{n}\,R \cdot \tan {}^{2}/_{n}\,R}{4\,(\pi + n)^{2}}$

---

694) $bf = (bhf + fb)\dfrac{n \cdot \sin {}^{2}/_{n}\,R}{\pi + n \cdot \sin {}^{2}/_{n}\,R}$

695) $bi = (bhf + fb)\dfrac{n \cdot \sin {}^{2}/_{n}\,R}{2\,(\pi + n \cdot \sin {}^{2}/_{n}\,R)}$

696) $bo = \dfrac{(bhf + fb) \cdot n}{2\,(\pi + n \cdot \sin {}^{2}/_{n}\,R)}$

Hosted by Google

697) $i\,o = (b\,h\,f + f\,b)\,\dfrac{n\,.\cos {}^{2}/_{n}\,R}{2\,(\pi + n\,.\sin {}^{2}/_{n}\,R)}$

698) $a\,o = \dfrac{(b\,h\,f + f\,b)\,n}{2\cos {}^{2}/_{n}\,R\,(\pi + n\,.\sin {}^{2}/_{n}\,R)}$

699) $a\,i = (b\,h\,f + f\,b)\,\dfrac{n\,.\sin {}^{2}/_{n}\,R\,.\tan {}^{2}/_{n}\,R}{2\,(\pi + n\,.\sin {}^{2}/_{n}\,R)}$

700) $a\,h = \dfrac{(b\,h\,f + f\,b)\,n\,(1 - \cos {}^{2}/_{n}\,R)}{2\cos {}^{2}/_{n}\,R\,(\pi + n\,.\sin {}^{2}/_{n}\,R)}$

701) $h\,i = (b\,h\,f + f\,b)\,\dfrac{n\,(1 - \cos {}^{2}/_{n}\,R)}{2\,(\pi + n\,.\sin {}^{2}/_{n}\,R)}$

702) $b\,h\,f = \dfrac{(b\,h\,f + f\,b)\,.\,\pi}{\pi + n\,.\sin {}^{2}/_{n}\,R}$

703) $a\,c = (b\,h\,f + f\,b)\,\dfrac{n\,.\tan {}^{2}/_{n}\,R}{\pi + n\,.\sin {}^{2}/_{n}\,R}$

704) $a\,b = (b\,h\,f + f\,b)\,\dfrac{n\,.\tan {}^{2}/_{n}\,R}{2\,(\pi + n\,.\sin {}^{2}/_{n}\,R)}$

705) $2\,\pi\,r = \dfrac{(b\,h\,f + f\,b)\,\pi\,.\,n}{\pi + n\,.\sin {}^{2}/_{n}\,R}$

706) $b\,f + f\,d + d\,b = \dfrac{(b\,h\,f + f\,b)\,n^{2}\,.\sin {}^{2}/_{n}\,R}{\pi + n\,.\sin {}^{2}/_{n}\,R}$

707) $a\,c + c\,e + e\,a = (b\,h\,f + f\,b)\,\dfrac{n^{2}\,.\tan {}^{2}/_{n}\,R}{\pi + n\,.\sin {}^{2}/_{n}\,R}$

708) $b\,o + o\,f + f\,b = (b\,h\,f + f\,b)\,\dfrac{n\,(1 + \sin {}^{2}/_{n}\,R)}{\pi + n\,.\sin {}^{2}/_{n}\,R}$

709) $b\,i + i\,o + o\,b = (b\,h\,f + f\,b)\,\dfrac{n\,(1 + \sin {}^{2}/_{n}\,R + \cos {}^{2}/_{n}\,R)}{2\,(\pi + n\,.\sin {}^{2}/_{n}\,R)}$

710) $a\,c + c\,o + o\,a = \dfrac{(b\,h\,f + f\,b)\,n\,(1 + \sin {}^{2}/_{n}\,R)}{(\pi + n\,.\sin {}^{2}/_{n}\,R)\cos {}^{2}/_{n}\,R}$

711) $b\,o + o\,c + c\,b = \dfrac{(b\,h\,f + f\,b)\,n\,(1 + \sin {}^{2}/_{n}\,R + \cos {}^{2}/_{n}\,R)}{2\cos {}^{2}/_{n}\,R\,(\pi + n\,.\sin {}^{2}/_{n}\,R)}$

712) $a\,b + b\,f + f\,a = (b\,h\,f + f\,b)\,\dfrac{(1 + \cos {}^{2}/_{n}\,R)\,n\,.\tan {}^{2}/_{n}\,R}{\pi + n\,.\sin {}^{2}/_{n}\,R}$

713) $a\,b + b\,i + i\,a = \dfrac{(b\,h\,f + f\,b)\,n\,(1 + \sin {}^{2}/_{n}\,R + \cos {}^{2}/_{n}\,R)}{2\cot {}^{2}/_{n}\,R\,(\pi + n\,.\sin {}^{2}/_{n}\,R)}$

714) $b\,h\,f + f\,o + o\,b = \dfrac{(b\,h\,f + f\,b)\,(\pi + n)}{\pi + n\,.\sin {}^{2}/_{n}\,R}$

715) $b\,h\,f + f\,b = b\,h\,f + f\,b$

716) $a\,b + b\,h\,f + f\,a = (b\,h\,f + f\,b)\,\dfrac{(\pi + n\,.\tan {}^{2}/_{n}\,R)}{\pi + n\,.\sin {}^{2}/_{n}\,R}$

Hosted by Google

717) $ab + bo + of + fa = (bhf + fb)\dfrac{n(1 + \tan {}^{2}/_{n}\,R)}{\pi + n \cdot \sin {}^{2}/_{n}\,R}$

718) $\triangle bof = (bhf + fb)^2 \dfrac{n^2 \cdot \sin {}^{2}/_{n}\,R \cdot \cos {}^{2}/_{n}\,R}{4(\pi + n \cdot \sin {}^{2}/_{n}\,R)^2}$

719) $\triangle bfd = (bhf + fb)^2 \dfrac{n^3 \sin {}^{2}/_{n}\,R \cdot \cos {}^{2}/_{n}\,R}{4(\pi + n \cdot \sin {}^{2}/_{n}\,R)^2}$

720) $\triangle aco = (bhf + fb)^2 \dfrac{n^2 \cdot \tan {}^{2}/_{n}\,R}{4(\pi + n \cdot \sin {}^{2}/_{n}\,R)^2}$

721) $\triangle ace = (bhf + fb)^2 \dfrac{n^3 \cdot \tan {}^{2}/_{n}\,R}{4(\pi + n \cdot \sin {}^{2}/_{n}\,R)^2}$

722) $bofh = \dfrac{(bhf + fb)^2\, n}{4(\pi + n \cdot \sin {}^{2}/_{n}\,R)^2}$ **723)** $\pi r^2 = \dfrac{(bhf + fb)^2\, n^2}{4(\pi + n \cdot \sin {}^{2}/_{n}\,R)^2}$

724) $bhfi = (bhf + fb)^2 \dfrac{n(\pi - n \cdot \sin {}^{2}/_{n}\,R \cdot \cos {}^{2}/_{n}\,R)}{4(\pi + n \cdot \sin {}^{2}/_{n}\,R)^2}$

725) $bhfa = (bhf + fb)^2 \dfrac{n(n \cdot \tan {}^{2}/_{n}\,R - \pi)}{4(\pi + n \cdot \sin {}^{2}/_{n}\,R)^2}$

726) $\triangle baf = (bhf + fb)^2 \dfrac{n^2 \cdot \sin^2 {}^{2}/_{n}\,R \cdot \tan {}^{2}/_{n}\,R}{4(\pi + n \cdot \sin {}^{2}/_{n}\,R)^2}$

---

727) $bf = (ab + bhf + fa)\dfrac{n \cdot \sin {}^{2}/_{n}\,R}{\pi + n \cdot \tan {}^{2}/_{n}\,R}$

728) $bi = (ab + bhf + fa)\dfrac{n \cdot \sin {}^{2}/_{n}\,R}{2(\pi + n \cdot \tan {}^{2}/_{n}\,R)}$

729) $bo = \dfrac{(ab + bhf + fa)\,n}{2(\pi + n \cdot \tan {}^{2}/_{n}\,R)}$

730) $io = (ab + bhf + fa)\dfrac{n \cdot \cos {}^{2}/_{n}\,R}{2(\pi + n \cdot \tan {}^{2}/_{n}\,R)}$

731) $ao = \dfrac{(ab + bhf + fa)\,n}{2(\pi \cdot \cos {}^{2}/_{n}\,R + n \cdot \sin {}^{2}/_{n}\,R)}$

732) $ai = (ab + bhf + fa)\dfrac{n \cdot \sin {}^{2}/_{n}\,R}{2(\pi \cdot \cot {}^{2}/_{n}\,R + n)}$

733) $ah = (ab + bhf + fa)\dfrac{n(1 - \cos {}^{2}/_{n}\,R)}{2(\pi \cdot \cos {}^{2}/_{n}\,R + n \cdot \sin {}^{2}/_{n}\,R)}$

734) $hi = (ab + bhf + fa)\dfrac{n(1 - \cos {}^{2}/_{n}\,R)}{2(\pi + n \cdot \tan {}^{2}/_{n}\,R)}$

735) $bhf = \dfrac{ab + bhf + fa)\,\pi}{\pi + n \cdot \tan {}^{2}/_{n}\,R}$ **736)** $ac = \dfrac{(ab + bhf + fa)\,n}{\pi \cdot \cot {}^{2}/_{n}\,R + n}$

Hosted by Google

737) $ab = \frac{(ab + bhf + fa)\,n}{2(\pi \cdot \cot {}^{2}/_{n}\,R + n)}$ **738)** $2\pi r = \frac{(ab + bhf + fa)\,\pi \cdot n}{\pi + n \cdot \tan {}^{2}/_{n}\,R}$

739) $bf + fd + db = (ab + bhf + fa)\,\frac{n^2 \cdot \sin {}^{2}/_{n}\,R}{\pi + n \cdot \tan {}^{2}/_{n}\,R}$

740) $ac + ce + ea = \frac{(ab + bhf + fa)\,n^2}{\pi \cdot \cot {}^{2}/_{n}\,R + n}$

741) $bo + of + fb = (ab + bhf + fa)\,\frac{n(1 + \sin {}^{2}/_{n}\,R)}{\pi + n \cdot \tan {}^{2}/_{n}\,R}$

742) $bi + io + ob = (ab + bhf + fa)\,\frac{n(1 + \sin {}^{2}/_{n}\,R + \cos {}^{2}/_{n}\,R)}{2(\pi + n \cdot \tan {}^{2}/_{n}\,R)}$

743) $ac + co + oa = \frac{(ab + bhf + fa)\,n(1 + \sin {}^{2}/_{n}\,R)}{\pi \cdot \cos {}^{2}/_{n}\,R + n \cdot \sin {}^{2}/_{n}\,R}$

744) $bo + oc + cb = (ab + bhf + fa)\,\frac{n(1 + \sin {}^{2}/_{n}\,R + \cos {}^{2}/_{n}\,R)}{2(\pi \cdot \cos {}^{2}/_{n}\,R + n \cdot \sin {}^{2}/_{n}\,R)}$

745) $ab + bf + fa = (ab + bhf + fa)\,\frac{n(1 + \cos {}^{2}/_{n}\,R)}{\pi \cdot \cot {}^{2}/_{n}\,R + n}$

746) $ab + bi + ia = (ab + bhf + fa)\,\frac{n(1 + \sin {}^{2}/_{n} + R\cos {}^{2}/_{n}\,R)}{2(\pi \cdot \cot {}^{2}/_{n}\,R + n)}$

747) $bhf + fo + ob = (ab + bhf + fa)\,\frac{(\pi + n)}{\pi + n \cdot \tan {}^{2}/_{n}\,R}$

748) $bhf + fb = (ab + bhf + fa)\,\frac{(\pi + n \cdot \sin {}^{2}/_{n}\,R)}{\pi + n \cdot \tan {}^{2}/_{n}\,R}$

749) $ab + bhf + fa = ab + bhf + fa$

750) $ab + bo + of + fa = (ab + bhf + fa)\,\frac{n(\sin {}^{2}/_{n}\,R + \cos {}^{2}/_{n}\,R)}{\pi \cdot \cos {}^{2}/_{n}\,R + n \cdot \sin {}^{2}/_{n}\,R}$

751) $\triangle bof = (ab + bhf + fa)^2\,\frac{n^2 \cdot \sin {}^{2}/_{n}\,R \cdot \cos {}^{2}/_{n}\,R}{4(\pi + n \cdot \tan {}^{2}/_{n}\,R)^2}$

752) $\triangle bfd = (ab + bhf + fa)^2\,\frac{n^3 \cdot \sin {}^{2}/_{n}\,R \cdot \cos {}^{2}/_{n}\,R}{4(\pi + n \cdot \tan {}^{2}/_{n}\,R)^2}$

753) $\triangle aco = (ab + bhf + fa)^2\,\frac{n^2 \cdot \sin {}^{2}/_{n}\,R \cdot \cos {}^{2}/_{n}\,R}{4(\pi \cdot \cos {}^{2}/_{n}\,R + n \cdot \sin {}^{2}/_{n}\,R)^2}$

754) $\triangle ace = (ab + bhf + fa)^2\,\frac{n^3 \cdot \sin {}^{2}/_{n}\,R \cdot \cos {}^{2}/_{n}\,R}{4(\pi \cdot \cos {}^{2}/_{n}\,R + n \cdot \sin {}^{2}/_{n}\,R)^2}$

755) $bofh = \frac{(ab + bhf + fa)^2\,\pi \cdot n}{4(\pi + n \cdot \tan {}^{2}/_{n}\,R)^2}$

756) $\pi r^2 = \frac{(ab + bhf + fa)^2\,\pi \cdot n^2}{4(\pi + n \cdot \tan {}^{2}/_{n}\,R)^2}$

757) $bhfi = (ab + bhf + fa)^2\,\frac{n(\pi - n \cdot \sin {}^{2}/_{n}\,R \cdot \cos {}^{2}/_{n}\,R)}{4(\pi + n \cdot \tan {}^{2}/_{n}\,R)^2}$

Hosted by Google

758) $\mathrm{bhfa} = (\mathrm{ab} + \mathrm{bhf} + \mathrm{fa})^2 \dfrac{\mathrm{n}(\mathrm{n}.\tan {}^2/_{\mathrm{n}}\,\mathrm{R} - \pi)}{4(\pi + \mathrm{n}.\tan {}^2/_{\mathrm{n}}\,\mathrm{R})^2}$

759) $\triangle \mathrm{baf} = (\mathrm{ab} + \mathrm{bhf} + \mathrm{fa})^2 \dfrac{\mathrm{n}^2.\sin^2 {}^2/_{\mathrm{n}}\,\mathrm{R}.\tan {}^2/_{\mathrm{n}}\,\mathrm{R}}{4(\pi + \mathrm{n}.\tan {}^2/_{\mathrm{n}}\,\mathrm{R})^2}$

---

760) $\mathrm{bf} = (\mathrm{ab} + \mathrm{bo} + \mathrm{of} + \mathrm{fa}) \dfrac{\sin {}^2/_{\mathrm{n}}\,\mathrm{R}}{1 + \tan {}^2/_{\mathrm{n}}\,\mathrm{R}}$

761) $\mathrm{bi} = (\mathrm{ab} + \mathrm{bo} + \mathrm{of} + \mathrm{fa}) \dfrac{\sin {}^2/_{\mathrm{n}}\,\mathrm{R}}{2(1 + \tan {}^2/_{\mathrm{n}}\,\mathrm{R})}$

762) $\mathrm{bo} = \dfrac{(\mathrm{ab} + \mathrm{bo} + \mathrm{of} + \mathrm{fa})}{2(1 + \tan {}^2/_{\mathrm{n}}\,\mathrm{R})}$

763) $\mathrm{io} = (\mathrm{ab} + \mathrm{bo} + \mathrm{of} + \mathrm{fa}) \dfrac{\cos {}^2/_{\mathrm{n}}\,\mathrm{R}}{2(1 + \tan {}^2/_{\mathrm{n}}\,\mathrm{R})}$

764) $\mathrm{ao} = \dfrac{(\mathrm{ab} + \mathrm{bo} + \mathrm{of} + \mathrm{fa})}{2(\sin {}^2/_{\mathrm{n}}\,\mathrm{R} + \cos {}^2/_{\mathrm{n}}\,\mathrm{R})}$

765) $\mathrm{ai} = (\mathrm{ab} + \mathrm{bo} + \mathrm{of} + \mathrm{fa}) \dfrac{\sin {}^2/_{\mathrm{n}}\,\mathrm{R}}{2(1 + \cot {}^2/_{\mathrm{n}}\,\mathrm{R})}$

766) $\mathrm{ah} = (\mathrm{ab} + \mathrm{bo} + \mathrm{of} + \mathrm{fa}) \dfrac{(1 - \cos {}^2/_{\mathrm{n}}\,\mathrm{R})}{2(\sin {}^2/_{\mathrm{n}}\,\mathrm{R} + \cos {}^2/_{\mathrm{n}}\,\mathrm{R})}$

767) $\mathrm{hi} = (\mathrm{ab} + \mathrm{bo} + \mathrm{of} + \mathrm{fa}) \dfrac{(1 - \cos {}^2/_{\mathrm{n}}\,\mathrm{R})}{2(1 + \tan {}^2/_{\mathrm{n}}\,\mathrm{R})}$

768) $\mathrm{bhf} = \dfrac{(\mathrm{ab} + \mathrm{bo} + \mathrm{of} + \mathrm{fa})}{\mathrm{n}(1 + \tan {}^2/_{\mathrm{n}}\,\mathrm{R})}$ **769)** $\mathrm{ac} = \dfrac{(\mathrm{ab} + \mathrm{bo} + \mathrm{of} + \mathrm{fa})}{1 + \cot {}^2/_{\mathrm{n}}\,\mathrm{R}}$

770) $\mathrm{ab} = \dfrac{(\mathrm{ab} + \mathrm{bo} + \mathrm{of} + \mathrm{fa})}{2(1 + \cot {}^2/_{\mathrm{n}}\,\mathrm{R})}$ **771)** $2\pi\mathrm{r} = \dfrac{(\mathrm{ab} + \mathrm{bo} + \mathrm{of} + \mathrm{fa})\pi}{1 + \tan {}^2/_{\mathrm{n}}\,\mathrm{R}}$

772) $\mathrm{bf} + \mathrm{fd} + \mathrm{db} = (\mathrm{ab} + \mathrm{bo} + \mathrm{of} + \mathrm{fa}) \dfrac{\mathrm{n}.\sin {}^2/_{\mathrm{n}}\,\mathrm{R}}{1 + \tan {}^2/_{\mathrm{n}}\,\mathrm{R}}$

773) $\mathrm{ac} + \mathrm{ce} + \mathrm{ea} = (\mathrm{ab} + \mathrm{bo} + \mathrm{of} + \mathrm{fa}) \dfrac{\mathrm{n}.\tan {}^2/_{\mathrm{n}}\,\mathrm{R}}{1 + \tan {}^2/_{\mathrm{n}}\,\mathrm{R}}$

774) $\mathrm{bo} + \mathrm{of} + \mathrm{fb} = (\mathrm{ab} + \mathrm{bo} + \mathrm{of} + \mathrm{fa}) \dfrac{(1 + \sin {}^2/_{\mathrm{n}}\,\mathrm{R})}{1 + \tan {}^2/_{\mathrm{n}}\,\mathrm{R}}$

775) $\mathrm{bi} + \mathrm{io} + \mathrm{ob} = (\mathrm{ab} + \mathrm{bo} + \mathrm{of} + \mathrm{fa}) \dfrac{(1 + \sin {}^2/_{\mathrm{n}}\,\mathrm{R} + \cos {}^2/_{\mathrm{n}}\,\mathrm{R})}{2(1 + \tan {}^2/_{\mathrm{n}}\,\mathrm{R})}$

776) $\mathrm{ao} + \mathrm{co} + \mathrm{oa} = (\mathrm{ab} + \mathrm{bo} + \mathrm{of} + \mathrm{fa}) \dfrac{(1 + \sin {}^2/_{\mathrm{n}}\,\mathrm{R})}{\sin {}^2/_{\mathrm{n}}\,\mathrm{R} + \cos {}^2/_{\mathrm{n}}\,\mathrm{R}}$

777) $\mathrm{bo} + \mathrm{oc} + \mathrm{cb} = (\mathrm{ab} + \mathrm{bo} + \mathrm{of} + \mathrm{fa}) \dfrac{(1 + \sin {}^2/_{\mathrm{n}}\,\mathrm{R} + \cos {}^2/_{\mathrm{n}}\,\mathrm{R})}{2(\sin {}^2/_{\mathrm{n}}\,\mathrm{R} + \cos {}^2/_{\mathrm{n}}\,\mathrm{R})}$

Hosted by Google

778) $ab + bf + fa = (ab + bo + of + fa)\dfrac{(1 + \cos {}^{2}/_{n}\,R)}{2(1 + \cot {}^{2}/_{n}\,R}$

779) $ab + bi + ia = (ab + bo + of + fa)\dfrac{(1 + \sin {}^{2}/_{n}\,R + \cos {}^{2}/_{n}\,R)}{2(1 + \cot {}^{2}/_{n}\,R)}$

780) $bhf + fo + ob = (ab + bo + of + fa)\dfrac{(\pi + n)}{n(1 + \tan {}^{2}/_{n}\,R)}$

781) $bhf + fb = (ab + bo + of + fa)\dfrac{(\pi + n.\sin {}^{2}/_{n}\,R)}{n(1 + \tan {}^{2}/_{n}\,R)}$

782) $ab + bhf + fa = (ab + bo + of + fa)\dfrac{(\pi + n.\tan {}^{2}/_{n}\,R)}{n(1 + \tan {}^{2}/_{n}\,R)}$

783) $ab + bo + of + fa = ab + bo + of + fa$

784) $\triangle bof = (ab + bo + of + fa)^2\dfrac{\sin {}^{2}/_{n}\,R.\cos {}^{2}/_{n}\,R}{4(1 + \tan {}^{2}/_{n}\,R)^2}$

785) $\triangle bfd = (ab + bo + of + fa)^2\dfrac{n.\sin {}^{2}/_{n}\,R.\cos {}^{2}/_{n}\,R}{4(1 + \tan {}^{2}/_{n}\,R)^2}$

786) $\triangle aco = (ab + bo + of + fa)^2\dfrac{\tan {}^{2}/_{n}\,R}{4(1 + \tan {}^{2}/_{n}\,R)^2}$

787) $\triangle ace = (ab + bo + of + fa)^2\dfrac{n.\tan {}^{2}/_{n}\,R}{4(1 + \tan {}^{2}/_{n}\,R)^2}$

788) $bofh = \dfrac{(ab + bo + of + fa)^2\pi}{4n(1 + \tan {}^{2}/_{n}\,R)^2}$

789) $\pi r^2 = \dfrac{(ab + bo + of + fa)^2\pi}{4(1 + \tan {}^{2}/_{n}\,R)^2}$

790) $bhfi = (ab + bo + of + fa)^2\dfrac{(\pi - n.\sin {}^{2}/_{n}\,R.\cos {}^{2}/_{n}\,R)}{4n(1 + \tan {}^{2}/_{n}\,R)^2}$

791) $bhfa = (ab + bo + of + fa)^2\dfrac{(n.\tan {}^{2}/_{n}\,R - \pi)}{4n(1 + \tan {}^{2}/_{n}\,R)^2}$

792) $\triangle baf = (ab + bo + of + fa)^2\dfrac{\sin {}^{2}/_{n}\,R.\tan {}^{2}/_{n}\,R}{4(1 + \tan {}^{2}/_{n}\,R)^2}$

---

793) $bf = \sqrt{\triangle bof.4.\tan^2 {}^{2}/_{n}\,R}$ 794) $bi = \sqrt{\triangle bof.\tan {}^{2}/_{n}\,R}$

795) $bo = \dfrac{\sqrt{\triangle bof.\tan {}^{2}/_{n}\,R}}{\sin {}^{2}/_{n}\,R}$ 796) $io = \sqrt{\triangle bof.\cot {}^{2}/_{n}\,R}$

797) $ao = \dfrac{\sqrt{\triangle bof.\tan {}^{2}/_{n}\,R}}{\sin {}^{2}/_{n}\,R.\cos {}^{2}/_{n}\,R}$ 798) $ai = \sqrt{\triangle bof.\tan^2 {}^{2}/_{n}\,R \times \tan^2 {}^{2}/_{n}\,R}$

Hosted by Google

799) $ah = \sqrt{\triangle bof . \tan {}^{2}/_{n} R} \; \frac{(1 - \cos {}^{2}/_{n} R)}{\sin {}^{2}/_{n} R . \cos {}^{2}/_{n} R}$

800) $hi = \sqrt{\triangle bof . \tan {}^{2}/_{n} R} \; \frac{(1 - \cos {}^{2}/_{n} R)}{\sin {}^{2}/_{n} R}$

801) $bhf = \sqrt{\triangle bof . \tan {}^{2}/_{n} R} . \frac{2\pi}{n . \sin {}^{2}/_{n} R}$

802) $ac = \sqrt{\triangle bof . \tan {}^{2}/_{n} R} . \frac{2}{\cos {}^{2}/_{n} R}$ **803)** $ab = \frac{\sqrt{\triangle bof . \tan {}^{2}/_{n} R}}{\cos {}^{2}/_{n} R}$

804) $2\pi r = \sqrt{\triangle bof . \tan {}^{2}/_{n} R} . \frac{2\pi}{\sin {}^{2}/_{n} R}$

805) $bf + fd + db = \sqrt{\triangle bof . \tan {}^{2}/_{n} R} . 2n$

806) $ac + ce + ea = \sqrt{\triangle bof . \tan {}^{2}/_{n} R} . \frac{2n}{\cos {}^{2}/_{n} R}$

807) $bo + of + fb = \sqrt{\triangle bof . \tan {}^{2}/_{n} R} . \frac{2(1 + \sin {}^{2}/_{n} R)}{\sin {}^{2}/_{n} R}$

808) $bi + io + ob = \sqrt{\triangle bof . \tan {}^{2}/_{n} R} \; \frac{(1 + \sin {}^{2}/_{n} R + \cos {}^{2}/_{n} R)}{\sin {}^{2}/_{n} R}$

809) $ac + co + oa = \sqrt{\triangle bof . \tan {}^{2}/_{n} R} . \frac{2(1 + \sin {}^{2}/_{n} R)}{\sin {}^{2}/_{n} R . \cos {}^{2}/_{n} R}$

810) $bo + oc + cb = \sqrt{\triangle bof . \tan {}^{2}/_{n} R} \; \frac{(1 + \sin {}^{2}/_{n} R + \cos {}^{2}/_{n} R)}{\sin {}^{2}/_{n} R . \cos {}^{2}/_{n} R}$

811) $ab + bf + fa = \sqrt{\triangle bof . \tan {}^{2}/_{n} R} . \frac{2(1 + \cos {}^{2}/_{n} R)}{\cos {}^{2}/_{n} R}$

812) $ab + bi + ia = \sqrt{\triangle bof . \tan {}^{2}/_{n} R} \; \frac{(1 + \sin {}^{2}/_{n} R + \cos {}^{2}/_{n} R)}{\cos {}^{2}/_{n} R}$

813) $bhf + fo + ob = \sqrt{\triangle bof . \tan {}^{2}/_{n} R} . \frac{2(\pi + n)}{n . \sin {}^{2}/_{n} R}$

814) $bhf + fb = \sqrt{\triangle bof . \tan {}^{2}/_{n} R} . \frac{2(\pi + n . \sin {}^{2}/_{n} R)}{n . \sin {}^{2}/_{n} R}$

815) $ab + bhf + fa = \sqrt{\triangle bof . \tan {}^{2}/_{n} R} . \frac{2(\pi + n . \tan {}^{2}/_{n} R)}{n . \sin {}^{2}/_{n} R}$

816) $ab + bo + of + fa = \sqrt{\triangle bof . \tan {}^{2}/_{n} R} . \frac{2(1 + \tan {}^{2}/_{n} R)}{\sin {}^{2}/_{n} R}$

817) $\triangle bof = \triangle bof$ **818)** $\triangle bfd = \triangle bof . n$

819) $\triangle aco = \frac{\triangle bof}{\cos {}^{2}/_{n} R}$ **820)** $\triangle ace = \frac{\triangle bof . n}{\cos {}^{2}/_{n} R}$

Hosted by Google

821) $\mathrm{bofh} = \dfrac{\triangle \mathrm{bof}.\pi}{\mathrm{n}.\sin {}^{2}/_{\mathrm{n}}\mathrm{R}.\cos {}^{2}/_{\mathrm{n}}\mathrm{R}}$ 822) $\pi \mathrm{r}^2 = \dfrac{\triangle \mathrm{bof}.\pi}{\sin {}^{2}/_{\mathrm{n}}\mathrm{R}.\cos {}^{2}/_{\mathrm{n}}\mathrm{R}}$

823) $\mathrm{bhfi} = \triangle \mathrm{bof} \dfrac{(\pi - \mathrm{n}.\sin {}^{2}/_{\mathrm{n}}\mathrm{R}.\cos {}^{2}/_{\mathrm{n}}\mathrm{R})}{\mathrm{n}.\sin {}^{2}/_{\mathrm{n}}\mathrm{R}.\cos {}^{2}/_{\mathrm{n}}\mathrm{R}}$

824) $\mathrm{bhfa} = \triangle \mathrm{bof} \dfrac{(\mathrm{n}.\tan {}^{2}/_{\mathrm{n}}\mathrm{R} - \pi)}{\mathrm{n}.\sin {}^{2}/_{\mathrm{n}}\mathrm{R}.\cos {}^{2}/_{\mathrm{n}}\mathrm{R}}$

825) $\triangle \mathrm{baf} = \triangle \mathrm{bof}.\overline{\tan {}^{2}/_{\mathrm{n}}\mathrm{R}}^{2}$

---

826 $\mathrm{bf} = \sqrt{\triangle \mathrm{bfd}.\,{}^{4}/_{\mathrm{n}}\tan {}^{2}/_{\mathrm{n}}\mathrm{R}}$ 827) $\mathrm{bi} = \sqrt{\triangle \mathrm{bfd}\,.\,{}^{1}/_{\mathrm{n}}\tan {}^{2}/_{\mathrm{n}}\mathrm{R}}$

828) $\mathrm{bo} = \dfrac{\sqrt{\triangle \mathrm{bfd}.\,{}^{1}/_{\mathrm{n}}\tan {}^{2}/_{\mathrm{n}}\mathrm{R}}}{\sin {}^{2}/_{\mathrm{n}}\mathrm{R}}$ 829) $\mathrm{io} = \dfrac{\sqrt{\triangle \mathrm{bfd}.\,{}^{1}/_{\mathrm{n}}\tan {}^{2}/_{\mathrm{n}}\mathrm{R}}}{\tan {}^{2}/_{\mathrm{n}}\mathrm{R}}$

830) $\mathrm{ao} = \dfrac{\sqrt{\triangle \mathrm{bfd}.\,{}^{1}/_{\mathrm{n}}\tan {}^{2}/_{\mathrm{n}}\mathrm{R}}}{\sin {}^{2}/_{\mathrm{n}}\mathrm{R}.\cos {}^{2}/_{\mathrm{n}}\mathrm{R}}$

831) $\mathrm{ai} = \sqrt{\triangle \mathrm{bfd}.\,{}^{1}/_{\mathrm{n}}\tan {}^{2}/_{\mathrm{n}}\mathrm{R}}.\tan {}^{2}/_{\mathrm{n}}\mathrm{R}$

832) $\mathrm{ah} = \sqrt{\triangle \mathrm{bfd}.\,{}^{1}/_{\mathrm{n}}\tan {}^{2}/_{\mathrm{n}}\mathrm{R}} \dfrac{(1 - \cos {}^{2}/_{\mathrm{n}}\mathrm{R})}{\sin {}^{2}/_{\mathrm{n}}\mathrm{R}.\cos {}^{2}/_{\mathrm{n}}\mathrm{R}}$

833) $\mathrm{hi} = \sqrt{\triangle \mathrm{bfd}.\,{}^{1}/_{\mathrm{n}}\tan {}^{2}/_{\mathrm{n}}\mathrm{R}} \dfrac{(1 - \cos {}^{2}/_{\mathrm{n}}\mathrm{R})}{\sin {}^{2}/_{\mathrm{n}}\mathrm{R}}$

834) $\mathrm{bhf} = \sqrt{\triangle \mathrm{bfd}.\,{}^{1}/_{\mathrm{n}}\tan {}^{2}/_{\mathrm{n}}\mathrm{R}} \dfrac{2\pi}{\mathrm{n}.\sin {}^{2}/_{\mathrm{n}}\mathrm{R}}$

835) $\mathrm{ac} = \sqrt{\triangle \mathrm{bfd}.\,{}^{1}/_{\mathrm{n}}\tan {}^{2}/_{\mathrm{n}}\mathrm{R}}.\dfrac{2}{\cos {}^{2}/_{\mathrm{n}}\mathrm{R}}$

836) $\mathrm{ab} = \dfrac{\sqrt{\triangle \mathrm{bfd}.\,{}^{1}/_{\mathrm{n}}\tan {}^{2}/_{\mathrm{n}}\mathrm{R}}}{\cos {}^{2}/_{\mathrm{n}}\mathrm{R}}$

837) $2\pi \mathrm{r} = \sqrt{\triangle \mathrm{bfd}.\,{}^{1}/_{\mathrm{n}}\tan {}^{2}/_{\mathrm{n}}\mathrm{R}}.\dfrac{2\pi}{\sin {}^{2}/_{\mathrm{n}}\mathrm{R}}$

838) $\mathrm{bf} + \mathrm{fd} + \mathrm{db} = \sqrt{\triangle \mathrm{bfd}.4\,\mathrm{n}.\tan {}^{2}/_{\mathrm{n}}\mathrm{R}}$

839) $\mathrm{ac} + \mathrm{ce} + \mathrm{ea} = \sqrt{\triangle \mathrm{bfd}.\mathrm{n}.\tan {}^{2}/_{\mathrm{n}}\mathrm{R}}.\dfrac{2}{\cos {}^{2}/_{\mathrm{n}}\mathrm{R}}$

840) $\mathrm{bo} + \mathrm{of} + \mathrm{fb} = \sqrt{\triangle \mathrm{bfd}.\,{}^{1}/_{\mathrm{n}}\tan {}^{2}/_{\mathrm{n}}\mathrm{R}}.\dfrac{2\,(1 + \sin {}^{2}/_{\mathrm{n}}\mathrm{R})}{\sin {}^{2}/_{\mathrm{n}}\mathrm{R}}$

841) $\mathrm{bi} + \mathrm{io} + \mathrm{ob} = \sqrt{\triangle \mathrm{bfd}.\,{}^{1}/_{\mathrm{n}}\tan {}^{2}/_{\mathrm{n}}\mathrm{R}} \dfrac{(1 + \sin {}^{2}/_{\mathrm{n}}\mathrm{R} + \cos {}^{2}/_{\mathrm{n}}\mathrm{R})}{\sin {}^{2}/_{\mathrm{n}}\mathrm{R}}$

842) $\mathrm{ac} + \mathrm{co} + \mathrm{oa} = \sqrt{\triangle \mathrm{bfd}.\,{}^{1}/_{\mathrm{n}}\tan {}^{2}/_{\mathrm{n}}\mathrm{R}}.\dfrac{2\,(1 + \sin {}^{2}/_{\mathrm{n}}\mathrm{R})}{\sin {}^{2}/_{\mathrm{n}}\mathrm{R}.\cos {}^{2}/_{\mathrm{n}}\mathrm{R}}$

Hosted by Google

843) $bo + oc + cb = \sqrt{\triangle bfd \,.\, {}^{1}/_{n} \tan {}^{2}/_{n} R} \dfrac{(1 + \sin {}^{2}/_{n} R + \cos {}^{2}/_{n} R)}{\sin {}^{2}/_{n} R \,.\, \cos {}^{2}/_{n} R}$

844) $ab + bf + fa = \sqrt{\triangle bfd \,.\, {}^{1}/_{n} \tan {}^{2}/_{n} R} \,.\, \dfrac{2\,(1 + \cos {}^{2}/_{n} R)}{\cos {}^{2}/_{n} R}$

845) $ab + bi + ia = \sqrt{\triangle bfd \,.\, {}^{1}/_{n} \tan {}^{2}/_{n} R} \dfrac{(1 + \sin {}^{2}/_{n} R + \cos {}^{2}/_{n} R)}{\cos {}^{2}/_{n} R}$

846) $bhf + fo + ob = \sqrt{\triangle bfd \,.\, {}^{1}/_{n} \tan {}^{2}/_{n} R} \,.\, \dfrac{2\,(\pi + n)}{n \,.\, \sin {}^{2}/_{n} R}$

847) $bhf + fb = \sqrt{\triangle bfd \,.\, {}^{1}/_{n} \tan {}^{2}/_{n} R} \,.\, \dfrac{2\,(\pi + n \,.\, \sin {}^{2}/_{n} R)}{n \,.\, \sin {}^{2}/_{n} R}$

848) $ab + bhf + fa = \sqrt{\triangle bfd \,.\, {}^{1}/_{n} \tan {}^{2}/_{n} R} \,.\, \dfrac{2\,(\pi + n \,.\, \tan {}^{2}/_{n} R)}{n \,.\, \sin {}^{2}/_{n} R}$

849) $ab + bo + of + fa = \sqrt{\triangle bfd \,.\, {}^{1}/_{n} \tan {}^{2}/_{n} R} \,.\, \dfrac{2\,(1 + \tan {}^{2}/_{n} R)}{\sin {}^{2}/_{n} R}$

850) $\triangle bof = \dfrac{\triangle bfd}{n}$ **851)** $\triangle bfd = \triangle bfd$

852) $\triangle aco = \dfrac{\triangle bfd}{n \,.\, \cos {}^{2}/_{n} R^{2}}$ **853)** $\triangle ace = \dfrac{\triangle bfd}{\cos {}^{2}/_{n} R^{2}}$

854) $bofh = \dfrac{\triangle bfd \,.\, \pi}{n^2 \,.\, \sin {}^{2}/_{n} R \,.\, \cos {}^{2}/_{n} R}$

855) $\pi r^2 = \dfrac{\triangle bfd \,.\, \pi}{n \,.\, \sin {}^{2}/_{n} R \,.\, \cos {}^{2}/_{n} R}$

856) $bhfi = \triangle bfd \dfrac{(\pi - n \,.\, \sin {}^{2}/_{n} R \,.\, \cos {}^{2}/_{n} R)}{n^2 \,.\, \sin {}^{2}/_{n} R \,.\, \cos {}^{2}/_{n} R}$

857) $bhfa = \triangle bfd \dfrac{(n - \pi \,.\, \cot {}^{2}/_{n} R)}{n^2 \,.\, \cos {}^{2}/_{n} R^{2}}$

858) $\triangle baf = \triangle bfd \,.\, \dfrac{\tan {}^{2}/_{n} R^{2}}{n}$

---

859) $bf = \sqrt{\triangle aco \,.\, 2 \sin {}^{4}/_{n} R}$ **860)** $bi = \sqrt{\triangle aco \,.\, \sin {}^{2}/_{n} R \cos {}^{2}/_{n} R}$

861) $bo = \sqrt{\triangle aco \,.\, \cot {}^{2}/_{n} R}$ **862)** $io = \sqrt{\triangle aco \,.\, \cot {}^{2}/_{n} R \,.\, \cos {}^{2}/_{n} R}$

863) $ao = \dfrac{\sqrt{\triangle aco \,.\, \tan {}^{2}/_{n} R}}{\sin {}^{2}/_{n} R}$ **864)** $ai = \sqrt{\triangle aco \,.\, \tan {}^{2}/_{n} R \,.\, \sin {}^{2}/_{n} R}$

865) $ah = \sqrt{\triangle aco \,.\, \tan {}^{2}/_{n} R} \dfrac{(1 - \cos {}^{2}/_{n} R)}{\sin {}^{2}/_{n} R}$

866) $hi = \sqrt{\triangle aco \,.\, \cot {}^{2}/_{n} R} \,(1 - \cos {}^{2}/_{n} R)$

Hosted by Google

867) $bhf = \sqrt{\triangle aco \cdot \cot {}^{2}/_{n} R} \cdot \frac{2\pi}{n}$ 268) $ac = \sqrt{\triangle aco \cdot 4 \tan {}^{2}/_{n} R}$

869) $ab = \sqrt{\triangle aco \cdot \tan {}^{2}/_{n} R}$ 870) $2\pi r = \sqrt{\triangle aco \cdot \cot {}^{2}/_{n} R} \cdot 2\pi$

871) $bf + fd + db = \sqrt{\triangle aco \cdot \tan {}^{2}/_{n} R} \cdot 2n \cdot \cos {}^{2}/_{n} R$

872) $ac + ce + ea = \sqrt{\triangle aco \cdot \tan {}^{2}/_{n} R} \cdot 2n$

873) $bo + of + fb = \sqrt{\triangle aco \cdot \cot {}^{2}/_{n} R} \cdot 2 (1 + \sin {}^{2}/_{n} R)$

874) $bi + io + ob = \sqrt{\triangle aco \cdot \cot {}^{2}/_{n} R} (1 + \sin {}^{2}/_{n} R + \cos {}^{2}/_{n} R)$

875) $ac + co + oa = \sqrt{\triangle aco \cdot \tan {}^{2}/_{n} R} \cdot \frac{2 (1 + \sin {}^{2}/_{n} R)}{\sin {}^{2}/_{n} R}$

876) $bo + oc + cb = \sqrt{\triangle aco \cdot \tan {}^{2}/_{n} R} \frac{(1 + \sin {}^{2}/_{n} R + \cos {}^{2}/_{n} R)}{\sin {}^{2}/_{n} R}$

877) $ab + bf + fa = \sqrt{\triangle aco \cdot \tan {}^{2}/_{n} R} \cdot 2 (1 + \cos {}^{2}/_{u} R)$

878) $ab + bi + ia = \sqrt{\triangle aco \cdot \tan {}^{2}/_{n} R} (1 + \sin {}^{2}/_{n} R + \cos {}^{2}/_{n} R)$

879) $bhf + fo + ob = \sqrt{\triangle aco \cdot \cot {}^{2}/_{n} R} \cdot \frac{2 (\pi + n)}{n}$

880) $bhf + fb = \sqrt{\triangle aco \cdot \cot {}^{2}/_{n} R} \cdot \frac{2 (\pi + n \cdot \sin {}^{2}/_{n} R)}{2}$

881) $ab + bhf + fa = \sqrt{\triangle aco \cdot \tan {}^{2}/_{n} R} \cdot \frac{2 (\pi \cdot \cot {}^{2}/_{n} R + n)}{n}$

882) $ab + bo + of + fa = \sqrt{\triangle aco \cdot \tan {}^{2}/_{n} R} \cdot 2 (1 + \cot {}^{2}/_{n} R)$

883) $\triangle bof = \triangle aco \cdot \cos {}^{2}/_{n} \overline{R}^{2}$ 884) $\triangle bfd = \triangle aco \cdot n \cdot \cos {}^{2}/_{n} \overline{R}^{2}$

885) $\triangle aco = \triangle aco.$ 886) $\triangle ace = \triangle aco \cdot n$

887) $bofh = \triangle aco \cdot \frac{\pi \cdot \cot {}^{2}/_{n} R}{n}$ 888) $\pi r^2 = \triangle aco \cdot \pi \cdot \cot {}^{2}/_{n} R$

889) $bhfi = \triangle aco \frac{(\pi - n \cdot \sin {}^{2}/_{n} R \cdot \cos {}^{2}/_{n} R)}{n \cdot \tan {}^{2}/_{n} R}$

890) $bhfa = \triangle aco \frac{(n - \pi \cdot \cot {}^{2}/_{n} R)}{n}$ 891) $\triangle baf = \triangle aco \cdot \sin {}^{2}/_{n} \overline{R}^{2}$

---

892) $bf = \frac{\sqrt{\triangle ace \cdot 2n \cdot \sin {}^{4}/_{n} R}}{n}$

893) $bi = \frac{\sqrt{\triangle ace \cdot n \cdot \sin {}^{2}/_{n} R \cdot \cos {}^{2}/_{n} R}}{n}$

894) $bo = \sqrt{\triangle ace \cdot {}^{1}/_{n} \cot {}^{2}/_{n} R}$

895) $io = \sqrt{\triangle ace \cdot {}^{1}/_{n} \cdot \cot {}^{2}/_{n} R \cdot \cos {}^{2}/_{n} R}$

Hosted by Google

896) $a\,o = \frac{\sqrt{\triangle a\,c\,e \,.\, {}^{1}/_{n} \tan {}^{2}/_{n} R}}{\sin {}^{2}/_{n} R}$

897) $a\,i = \sqrt{\triangle a\,c\,e \,.\, {}^{1}/_{n} \tan {}^{2}/_{n} R} \,.\, \sin {}^{2}/_{n} R$

898) $a\,h = \sqrt{\triangle a\,c\,e \,.\, {}^{1}/_{n} \tan {}^{2}/_{n} R}\, \frac{(1 - \cos {}^{2}/_{n} R)}{\sin {}^{2}/_{n} R}$

899) $h\,i = \sqrt{\triangle a\,c\,e \,.\, {}^{1}/_{n} \cot {}^{2}/_{n} R}\,(1 - \cos {}^{2}/_{n} R)$

900) $b\,h\,f = \sqrt{\triangle a\,c\,e \,.\, {}^{1}/_{n} \cot {}^{2}/_{n} R} \,.\, \frac{2\,\pi}{n}$

901) $a\,c = \sqrt{\triangle a\,c\,e \,.\, {}^{4}/_{n} \tan {}^{2}/_{n} R}$ **902)** $a\,b = \sqrt{\triangle a\,c\,e \,.\, {}^{1}/_{n} \tan {}^{2}/_{n} R}$

903) $2\,\pi\,r = \sqrt{\triangle a\,c\,e \,.\, {}^{1}/_{n} \cot {}^{2}/_{n} R} \,.\, 2\,\pi$

904) $b\,f + f\,d + d\,b = \sqrt{\triangle a\,c\,e \,.\, n \,.\, \tan {}^{2}/_{n} R} \,.\, 2 \cos {}^{2}/_{n} R$

905) $a\,c + c\,e + o\,a = \sqrt{\triangle a\,c\,e \,.\, 4\,n \tan {}^{2}/_{n} R}$

906) $b\,o + o\,f + f\,b = \sqrt{\triangle a\,c\,e \,.\, {}^{1}/_{n} \cot {}^{2}/_{n} R} \,.\, 2\,(1 + \sin {}^{2}/_{n} R)$

907) $b\,i + i\,o + o\,b = \sqrt{\triangle a\,c\,e \,.\, {}^{1}/_{n} \cot {}^{2}/_{n} R}\,(1 + \sin {}^{2}/_{n} R + \cos {}^{2}/_{n} R)$

908) $a\,c + c\,o + o\,a = \sqrt{\triangle a\,c\,e \,.\, {}^{1}/_{n} \tan {}^{2}/_{n} R} \,.\, \frac{2\,(1 + \sin {}^{2}/_{n} R)}{\sin {}^{2}/_{n} R}$

909) $b\,o + o\,c + c\,b = \sqrt{\triangle a\,c\,e \,.\, {}^{1}/_{n} \tan {}^{2}/_{n} R}\, \frac{(1 + \sin {}^{2}/_{n} R + \cos {}^{2}/_{n} R)}{\sin {}^{2}/_{n} R}$

910) $a\,b + b\,f + f\,a = \sqrt{\triangle a\,c\,e \,.\, {}^{1}/_{n} \tan {}^{2}/_{n} R} \,.\, 2\,(1 + \cos {}^{2}/_{n} R)$

911) $a\,b + b\,i + i\,a = \sqrt{\triangle a\,c\,e \,.\, {}^{1}/_{n} \tan {}^{2}/_{n} R}\,(1 + \sin {}^{2}/_{n} R + \cos {}^{2}/_{n} R)$

912) $b\,h\,f + f\,o + o\,b = \sqrt{\triangle a\,c\,e \,.\, {}^{1}/_{n} \cot {}^{2}/_{n} R} \,.\, \frac{2\,(\pi + n)}{n}$

913) $b\,h\,f + f\,b = \sqrt{\triangle a\,c\,e \,.\, {}^{1}/_{n} \cot {}^{2}/_{n} R} \,.\, \frac{2\,(\pi + n \,.\, \sin {}^{2}/_{n} R)}{n}$

914) $a\,b + b\,h\,f + f\,a = \sqrt{\triangle a\,c\,e \,.\, {}^{1}/_{n} \tan {}^{2}/_{n} R} \,.\, \frac{2\,(\pi \,.\, \cot {}^{2}/_{n} R + n)}{n}$

915) $a\,b + b\,o + o\,f + f\,a = \sqrt{\triangle a\,c\,e \,.\, {}^{1}/_{n} \tan {}^{2}/_{n} R} \,.\, 2\,(1 + \cot {}^{2}/_{n} R)$

916) $\triangle b\,o\,f = \triangle a\,c\,e \,.\, \frac{\cos {}^{2}/_{n} R}{n}$ **917)** $\triangle b\,f\,d = \triangle a\,c\,e \,.\, \cos {}^{2}/_{n} R$

918) $\triangle a\,c\,o = \frac{\triangle a\,c\,e}{n}$ **919)** $\triangle a\,c\,e = \triangle a\,c\,e$

920) $b\,o\,f\,h = \triangle a\,c\,e \,.\, \frac{\pi \,.\, \cot {}^{2}/_{n} R}{n^{2}}$ **921)** $\pi\,r^{2} = \triangle a\,c\,e \,.\, \frac{\pi \,.\, \cot {}^{2}/_{n} R}{n}$

922) $b\,h\,f\,i = \triangle a\,c\,e\, \frac{(\pi - n \,.\, \sin {}^{2}/_{n} R \,.\, \cos {}^{2}/_{n} R)}{n^{2} \,.\, \tan {}^{2}/_{n} R}$

Hosted by Google

923) $bhfa = \triangle ace \frac{(n - \pi . \cot {}^{2}/_{n} R)}{n^2}$ **924)** $\triangle baf = \triangle ace . \frac{\sin {}^{2}/_{n} R^2}{n}$

---

925) $bf = \sqrt{bofh . {}^{n}/_{\pi}} . 2 \sin {}^{2}/_{n} R$ **926)** $bi = \sqrt{bofh . {}^{n}/_{\pi}} . \sin {}^{2}/_{n} R$

927) $bo = \sqrt{bofh . {}^{n}/_{\pi}}$. **928)** $io = \sqrt{bofh . {}^{n}/_{\pi}} . \cos {}^{2}/_{n} R$

929) $ao = \frac{\sqrt{bofh . {}^{n}/_{\pi}}}{\cos {}^{2}/_{n} R}$ **930)** $ai = \sqrt{bofh . {}^{n}/_{\pi}} . \sin {}^{2}/_{n} R . \tan {}^{2}/_{n} R$

931) $ah = \sqrt{bofh . {}^{n}/_{\pi}} \frac{(1 - \cos {}^{2}/_{n} R)}{\cos {}^{2}/_{n} R}$

932) $hi = \sqrt{bofh . {}^{n}/_{\pi}} (1 - \cos {}^{2}/_{n} R)$ **933)** $bhf = \sqrt{bofh . {}^{n}/_{\pi}} \frac{2\pi}{n}$

934) $ac = \sqrt{bofh . {}^{n}/_{\pi}} . 2 \tan {}^{2}/_{n} R$

935) $ab = \sqrt{bofh . {}^{n}/_{\pi}} . \tan {}^{2}/_{n} R$ **936)** $2\pi r = \sqrt{bofh . {}^{n}/_{\pi}} . 2\pi$

937) $bf + fd + db = \sqrt{bofh . {}^{n}/_{\pi}} . 2n . \sin {}^{2}/_{n} R$

938) $ac + ce + ea = \sqrt{bofh . {}^{n}/_{\pi}} . 2n . \tan {}^{2}/_{n} R$

939) $bo + of + fb = \sqrt{bofh . {}^{n}/_{\pi}} . 2 (1 + \sin {}^{2}/_{n} R)$

940) $bi + io + ob = \sqrt{bofh . {}^{n}/_{\pi}} . (1 + \sin {}^{2}/_{n} R + \cos {}^{2}/_{n} R)$

941) $ac + co + oa = \sqrt{bofh . {}^{n}/_{\pi}} . \frac{2 (1 + \sin {}^{2}/_{n} R)}{\cos {}^{2}/_{n} R}$

942) $bo + oc + cb = \sqrt{both . {}^{n}/_{\pi}} \frac{(1 + \sin {}^{2}/_{n} R + \cos {}^{2}/_{n} R)}{\cos {}^{2}/_{n} R}$

943) $ab + bf + fa = \sqrt{bofh . {}^{n}/_{\pi}} . \frac{2 (1 + \cos {}^{2}/_{n} R)}{\tan {}^{2}/_{n} R}$

944) $ab + bi + ia = \sqrt{bofh . {}^{n}/_{\pi}} \frac{(1 + \sin {}^{2}/_{n} R + \cos {}^{2}/_{n} R)}{\cot . {}^{2}/_{n} R}$

945) $bhf + fo + ob = \sqrt{bofh . {}^{n}/_{\pi}} . \frac{2 (\pi + n)}{n}$

946) $bhf + fb = \sqrt{bofh . {}^{n}/_{\pi}} . \frac{2 (\pi + n . \sin {}^{2}/_{n} R)}{n}$

947) $ab + bhf + fa = \sqrt{bofh . {}^{n}/_{\pi}} . \frac{2 (\pi + n \tan {}^{2}/_{n} R)}{n}$

948) $ab + bo + of + fa = \sqrt{bofh . {}^{n}/_{\pi}} . 2 (1 + \tan {}^{2}/_{n} R)$

949) $\triangle bof = bofh . \frac{n . \sin {}^{2}/_{n} R . \cos {}^{2}/_{n} R}{\pi}$

950) $\triangle bfd = bofh . \frac{n^2 . \sin {}^{2}/_{n} R . \cos {}^{2}/_{n} R}{\pi}$

Hosted by Google

951) $\triangle a c o = b o f h . \frac{n . \tan {}^{2}/_{n} R}{\pi}$ **952)** $\triangle a c e = b o f h . \frac{n^2 . \tan {}^{2}/_{n} R}{\pi}$

953) $b o f h = b o f h$ **954)** $\pi r^2 = b o f h . n$

955) $b h f i = b o f h \frac{(\pi - n . \sin {}^{2}/_{n} R . \cos {}^{2}/_{n} R)}{\pi}$

956) $b h f a = b o f h \frac{(n . \tan {}^{2}/_{n} R - \pi)}{\pi}$

957) $\triangle b a f = b o f h . \frac{n . \overline{\sin {}^{2}/_{n} R}^{2} . \tan {}^{2}/_{n} R}{\pi}$

---

958) $b f = \sqrt{\frac{(\pi r^2) .}{\pi}} 2 \sin {}^{2}/_{n} R$ **959)** $b i = \sqrt{\frac{(\pi r^2) .}{\pi}} \sin {}^{2}/_{n} R$

960) $b o = \sqrt{\frac{(\pi r^2)}{\pi}}$ **961)** $i o = \sqrt{\frac{(\pi r^2) .}{\pi}} \cos {}^{2}/_{n} R$

962) $a o = \sqrt{\frac{(\pi r^2) .}{\pi}} \frac{1}{\cos {}^{2}/_{n} R}$ **963)** $a i = \sqrt{\frac{(\pi r^2) .}{\pi}} \sin {}^{2}/_{n} R . \tan {}^{2}/_{n} R$

964) $a h = \sqrt{\frac{(\pi r^2)}{\pi}} \frac{(1 - \cos {}^{2}/_{n} R)}{\cos {}^{2}/_{n} R}$

965) $h i = \sqrt{\frac{(\pi r^2)}{\pi}} (1 - \cos {}^{2}/_{n} R)$ **966)** $b h f = \sqrt{\frac{(\pi r^2) .}{\pi}} \frac{2 \pi}{n}$

967) $a c = \sqrt{\frac{(\pi r^2) .}{\pi}} 2 \tan {}^{2}/_{n} R$ **968)** $a b = \sqrt{\frac{(\pi r^2) .}{\pi}} \tan {}^{2}/_{n} R$

969) $2 \pi r = \sqrt{\frac{(\pi r^2) .}{\pi}} 2 \pi$

970) $b f + f d + d b = \sqrt{\frac{(\pi r^2) .}{\pi}} 2 n . \sin {}^{2}/_{n} R$

971) $a c + c e + e a = \sqrt{\frac{(\pi r^2) .}{\pi}} 2 n . \tan {}^{2}/_{n} R$

972) $b o + o f + f b = \sqrt{\frac{(\pi r^2) .}{\pi}} 2 (1 + \sin {}^{2}/_{n} R)$

973) $b i + i o + o b = \sqrt{\frac{(\pi r^2)}{\pi}} (1 + \sin {}^{2}/_{n} R + \cos {}^{2}/_{n} R)$

974) $a c + c o + o a = \sqrt{\frac{(\pi r^2) .}{\pi}} \frac{2 (1 + \sin {}^{2}/_{n} R)}{\cos {}^{2}/_{n} R}$

Hosted by Google

975) $b\,o + o\,c + c\,b = \sqrt{\frac{(\pi\,r^2)}{\pi}}\,\frac{(1 + \sin {}^2/_n\,R + \cos {}^2/_n\,R)}{\cos {}^2/_n\,R}$

976) $a\,b + b\,f + f\,a = \sqrt{\frac{(\pi\,r^2)}{\pi}}\cdot 2\tan {}^2/_n\,R\,(1 + \cos {}^2/_n\,R)$

977) $a\,b + b\,i + i\,a = \sqrt{\frac{(\pi\,r^2)}{\pi}}\,\frac{(1 + \sin {}^2/_n\,R + \cos {}^2/_n\,R)}{\cot {}^2/_n\,R}$

978) $b\,h\,f + f\,o + o\,b = \sqrt{\frac{(\pi\,r^2)}{\pi}}\cdot\frac{2\,(n + \pi)}{n}$

979) $b\,h\,f + f\,b = \sqrt{\frac{(\pi\,r^2)}{\pi}}\cdot\frac{2\,(\pi + n\,.\,\sin {}^2/_n\,R)}{n}$

980) $a\,b + b\,h\,f + f\,a = \sqrt{\frac{(\pi\,r^2)}{\pi}}\cdot\frac{2\,(\pi + n\,.\,\tan {}^2/_n\,R)}{n}$

981) $a\,b + b\,o + o\,f + f\,a = \sqrt{\frac{(\pi\,r^2)}{\pi}}\cdot 2\,(1 + \tan {}^2/_n\,R)$

982) $\triangle\,b\,o\,f = (\pi\,r^2)\,\frac{\sin {}^2/_n\,R\,.\,\cos {}^2/_n\,R}{\pi}$

983) $\triangle\,b\,f\,d = (\pi\,r^2)\,.\,\frac{n\,.\,\sin {}^2/_n\,R\,.\,\cos {}^2/_n\,R}{\pi}$

984) $\triangle\,a\,c\,o = (\pi\,r^2)\,.\,\frac{\tan {}^2/_n\,R}{\pi}$ **985)** $\triangle\,a\,c\,e = (\pi\,r^2)\,\frac{n\,.\,\tan {}^2/_n\,R}{\pi}$

986) $b\,o\,f\,h = \frac{(\pi\,r^2)}{n}$ **987)** $\pi\,r^2 = (\pi\,r^2)$

988) $b\,h\,f\,i = (\pi\,r^2)\,\frac{(\pi - n\,.\,\sin {}^2/_n\,R\,.\,\cos {}^2/_n\,R)}{n\,.\,\pi}$

989) $b\,h\,f\,a = (\pi\,r^2)\,\frac{(n\,.\,\tan {}^2/_n\,R - \pi)}{n\,.\,\pi}$

990) $\triangle\,b\,a\,f = (\pi\,r^2)\,\frac{\sin {}^2/_n\,R\,.\,\tan {}^2/_n\,R}{\pi}$

---

991) $b\,f = \sqrt{\frac{b\,h\,f\,i\,.\,n}{\pi - n\,.\,\sin {}^2/_n\,R\,.\,\cos {}^2/_n\,R}}\,.\,2\sin {}^2/_n\,R$

992) $b\,i = \sqrt{\frac{b\,h\,f\,i\,.\,n}{\pi - n\,.\,\sin {}^2/_n\,R\,.\,\cos {}^2/_n\,R}}\,.\,\sin {}^2/_n\,R$

993) $b\,o = \sqrt{\frac{b\,h\,f\,i\,.\,n}{\pi - n\,.\,\sin {}^2/_n\,R\,.\,\cos {}^2/_n\,R}}$

Hosted by Google

994) $\mathrm{i\,o} = \sqrt{\frac{\mathrm{b\,h\,f\,i}\,.\,\mathrm{n}}{\pi - \mathrm{n}\,.\sin {}^{2}\!/_{\mathrm{n}}\,\mathrm{R}\,.\cos {}^{2}\!/_{\mathrm{n}}\,\mathrm{R}}}\,.\cos {}^{2}\!/_{\mathrm{n}}\,\mathrm{R}$

995) $\mathrm{a\,o} = \sqrt{\frac{\mathrm{b\,h\,f\,i}\,.\,\mathrm{n}}{\pi - \mathrm{n}\,.\sin {}^{2}\!/_{\mathrm{n}}\,\mathrm{R}\,.\cos {}^{2}\!/_{\mathrm{n}}\,\mathrm{R}}}\,.\frac{1}{\cos {}^{2}\!/_{\mathrm{n}}\,\mathrm{R}}$

996) $\mathrm{a\,i} = \sqrt{\frac{\mathrm{b\,h\,f\,i}\,.\,\mathrm{n}}{\pi - \mathrm{n}\,.\sin {}^{2}\!/_{\mathrm{n}}\,\mathrm{R}\,.\cos {}^{1}\!/_{\mathrm{n}}\,\mathrm{R}}}\,.\sin {}^{2}\!/_{\mathrm{n}}\,\mathrm{R}\,.\tan {}^{2}\!/_{\mathrm{n}}\,\mathrm{R}$

997) $\mathrm{a\,h} = \sqrt{\frac{\mathrm{b\,h\,f\,i}\,.\,\mathrm{n}}{\pi - \mathrm{n}\,.\sin {}^{2}\!/_{\mathrm{n}}\,\mathrm{R}\,.\cos {}^{2}\!/_{\mathrm{n}}\,\mathrm{R}}}\,\frac{(1 - \cos {}^{2}\!/_{\mathrm{n}}\,\mathrm{R})}{\cos {}^{2}\!/_{\mathrm{n}}\,\mathrm{R}}$

998) $\mathrm{h\,i} = \sqrt{\frac{\mathrm{b\,h\,f\,i}\,.\,\mathrm{n}}{\pi - \mathrm{n}\,.\sin {}^{2}\!/_{\mathrm{n}}\,\mathrm{R}\,.\cos {}^{2}\!/_{\mathrm{n}}\,\mathrm{R}}}\,(1 - \cos {}^{2}\!/_{\mathrm{n}}\,\mathrm{R})$

999) $\mathrm{bhf} = \sqrt{\frac{\mathrm{b\,h\,f\,i}\,.\,\mathrm{n}}{\pi - \mathrm{n}\,.\sin {}^{2}\!/_{\mathrm{n}}\,\mathrm{R}\,.\cos {}^{2}\!/_{\mathrm{n}}\,\mathrm{R}}}\,.\frac{2\,\pi}{\mathrm{n}}$

1000) $\mathrm{a\,c} = \sqrt{\frac{\mathrm{b\,h\,f\,i}\,.\,\mathrm{n}}{\pi - \mathrm{n}\,.\sin {}^{2}\!/_{\mathrm{n}}\,\mathrm{R}\,.\cos {}^{2}\!/_{\mathrm{n}}\,\mathrm{R}}}\,.2.\tan {}^{2}\!/_{\mathrm{n}}\,\mathrm{R}$

1001) $\mathrm{a\,b} = \sqrt{\frac{\mathrm{b\,h\,f\,i}\,.\,\mathrm{n}}{\pi - \mathrm{n}\,.\sin {}^{2}\!/_{\mathrm{n}}\,\mathrm{R}\,.\cos {}^{2}\!/_{\mathrm{n}}\,\mathrm{R}}}\,.\tan {}^{2}\!/_{\mathrm{n}}\,\mathrm{R}$

1002) $2\pi\mathrm{r} = \sqrt{\frac{\mathrm{b\,h\,f\,i}\,.\,\mathrm{n}}{\pi - \mathrm{n}\,.\sin {}^{2}\!/_{\mathrm{n}}\,\mathrm{R}\,.\cos {}^{2}\!/_{\mathrm{n}}\,\mathrm{R}}}\,.\,2\,\pi$

1003) $\mathrm{b\,f} + \mathrm{f\,d} + \mathrm{d\,b} = \sqrt{\frac{\mathrm{b\,h\,f\,i}\,.\,\mathrm{n}}{\pi - \mathrm{n}\,.\sin {}^{2}\!/_{\mathrm{n}}\,\mathrm{R}\,.\cos {}^{2}\!/_{\mathrm{n}}\,\mathrm{R}}}\,.\,2\,\mathrm{n}\,.\sin {}^{2}\!/_{\mathrm{n}}\,\mathrm{R}$

1004) $\mathrm{a\,c} + \mathrm{c\,e} + \mathrm{e\,a} = \sqrt{\frac{\mathrm{b\,h\,f\,i}\,.\,\mathrm{n}}{\pi - \mathrm{n}\,.\sin {}^{2}\!/_{\mathrm{n}}\,\mathrm{R}\,.\cos {}^{2}\!/_{\mathrm{n}}\,\mathrm{R}}}\,.\,2\,\mathrm{n}\,.\tan {}^{2}\!/_{\mathrm{n}}\,\mathrm{R}$

1005) $\mathrm{b\,o} + \mathrm{o\,f} + \mathrm{f\,b} = \sqrt{\frac{\mathrm{b\,h\,f\,i}\,.\,\mathrm{n}}{\pi - \mathrm{n}\,.\sin {}^{2}\!/_{\mathrm{n}}\,\mathrm{R}\,.\cos {}^{2}\!/_{\mathrm{n}}\,\mathrm{R}}}\,.\,2\,(1 + \sin {}^{2}\!/_{\mathrm{n}}\,\mathrm{R})$

1006) $\mathrm{b\,i} + \mathrm{i\,o} + \mathrm{o\,b} = \sqrt{\frac{\mathrm{b\,h\,f\,i}\,.\,\mathrm{n}}{\pi - \mathrm{n}\,.\sin {}^{2}\!/_{\mathrm{n}}\,\mathrm{R}\,.\cos {}^{2}\!/_{\mathrm{n}}\,\mathrm{R}}}\,(1 + \sin {}^{2}\!/_{\mathrm{n}}\,\mathrm{R} + \cos {}^{2}\!/_{\mathrm{n}}\,\mathrm{R})$

1007) $\mathrm{a\,c} + \mathrm{c\,o} + \mathrm{o\,a} = \sqrt{\frac{\mathrm{b\,h\,f\,i}\,.\,\mathrm{n}}{\pi - \mathrm{n}\,.\sin {}^{2}\!/_{\mathrm{n}}\,\mathrm{R}\,.\cos {}^{2}\!/_{\mathrm{n}}\,\mathrm{R}}}\,.\frac{2\,(1 + \sin {}^{2}\!/_{\mathrm{n}}\,\mathrm{R})}{\cos {}^{2}\!/_{\mathrm{n}}\,\mathrm{R}}$

1008) $\mathrm{b\,o} + \mathrm{o\,c} + \mathrm{c\,b} = \sqrt{\frac{\mathrm{b\,h\,f\,i}\,.\,\mathrm{n}}{\pi - \mathrm{n}\,.\sin {}^{2}\!/_{\mathrm{n}}\,\mathrm{R}\,.\cos {}^{2}\!/_{\mathrm{n}}\,\mathrm{R}}}\,\frac{(1 + \sin {}^{2}\!/_{\mathrm{n}}\,\mathrm{R} + \cos {}^{2}\!/_{\mathrm{n}}\,\mathrm{R})}{\cos {}^{2}\!/_{\mathrm{n}}\,\mathrm{R}}$

1009) $\mathrm{a\,b} + \mathrm{b\,f} + \mathrm{f\,a} = \sqrt{\frac{\mathrm{b\,h\,f\,i}\,.\,\mathrm{n}}{\pi - \mathrm{n}\,.\sin {}^{2}\!/_{\mathrm{n}}\,\mathrm{R}\,.\cos {}^{2}\!/_{\mathrm{n}}\,\mathrm{R}}}\,.\frac{2\,(1 + \cos {}^{2}\!/_{\mathrm{n}}\,\mathrm{R})}{\cot {}^{2}\!/_{\mathrm{n}}\,\mathrm{R}}$

Hosted by Google

1010) $ab+bi+ia=\sqrt{\frac{bhfi.n}{\pi-n.\sin^2/_n R.\cos^2/_n R}}\,\frac{(1+\sin^2/_n R+\cos^2/_n R)}{\cot^2/_n R}$

1011) $bhf+fo+ob=\sqrt{\frac{bhfi.n}{\pi-n.\sin^2/_n R.\cos^2/_n R}}\cdot\frac{2(\pi+n)}{n}$

1012) $bhf+fb=\sqrt{\frac{bhfi.n}{\pi-n.\sin^2/_n R.\cos^2/_n R}}\cdot\frac{2\cos^2/_n R(\pi+n.\sin^2/_n R)}{n}$

1013) $ab+bhf+fa=\sqrt{\frac{bhfi.n}{\pi-n.\sin^2/_n R.\cos^2/_n R}}\cdot\frac{2(\pi+n.\tan^2/_n R)}{n}$

1014) $ab+bo+of+fa=\sqrt{\frac{bhfi.n}{\pi-n.\sin^2/_n R.\cos^2/_n R}}\cdot 2(1+\tan^2/_n R)$

1015) $\triangle bof=bhfi.\frac{n.\sin^2/_n R.\cos^2/_n R}{\pi-n.\sin^2/_n R.\cos^2/_n R}$

1016) $\triangle bfd=bhfi.\frac{n^2.\sin^2/_n R.\cos^2/_n R}{\pi-n.\sin^2/_n R.\cos^2/_n R}$

1017) $\triangle aco=bhfi.\frac{n.\tan^2/_n R}{\pi-n.\sin^2/_n R.\cos^2/_n R}$

1018) $\triangle ace=bhfi.\frac{n^2.\tan^2/_n R}{\pi-n.\sin^2/_n R.\cos^2/_n R}$

1019) $bofh=\frac{bhfi.\pi}{\pi-n.\sin^2/_n R.\cos^2/_n R}$

1020) $\pi r^2=\frac{bhfi.n.\pi}{\pi-n.\sin^2/_n R.\cos^2/_n R}$ **1021)** $bhfi=bhfi$

1022) $bhfa=bhfi\frac{(n.\tan^2/_n R-\pi)}{\pi-n.\sin^2/_n R.\cos^2/_n R}$

1023) $\triangle baf=bhfi.\frac{\sin^{\overline{2}}/_n R.\tan^2/_n R}{\pi-n.\sin^2/_n R.\cos^2/_n R}$

1024) $bf=\sqrt{\frac{bhfa.n}{n.\tan^2/_n R-\pi}}.2\sin^2/_n R$

1025) $bi=\sqrt{\frac{bhfa.n}{n.\tan^2/_n R-\pi}}.\sin^2/_n R$

1026) $bo=\sqrt{\frac{bhfa.n}{n.\tan^2/_n R-\pi}}$

Hosted by Google

1027) $\mathrm{i\,o} = \sqrt{\frac{\mathrm{b\,h\,f\,a}\,.\,\mathrm{n}}{\mathrm{n}\,.\,\tan {}^{2}/_{\mathrm{n}}\,\mathrm{R} - \pi}}\,.\cos {}^{2}/_{\mathrm{n}}\,\mathrm{R}$

1028) $\mathrm{a\,o} = \sqrt{\frac{\mathrm{b\,h\,f\,a}\,.\,\mathrm{n}}{\mathrm{n}\,.\,\tan {}^{2}/_{\mathrm{n}}\,\mathrm{R} - \pi}}\,.\,\frac{1}{\cos {}^{2}/_{\mathrm{n}}\,\mathrm{R}}$

1029) $\mathrm{a\,i} = \sqrt{\frac{\mathrm{b\,h\,f\,a}\,.\,\mathrm{n}}{\mathrm{n}\,.\,\tan {}^{2}/_{\mathrm{n}}\,\mathrm{R} - \pi}}\,.\sin {}^{2}/_{\mathrm{n}}\,\mathrm{R}\,.\tan {}^{2}/_{\mathrm{n}}\,\mathrm{R}$

1030) $\mathrm{a\,h} = \sqrt{\frac{\mathrm{b\,h\,f\,a}\,.\,\mathrm{n}}{\mathrm{n}\,.\,\tan {}^{2}/_{\mathrm{n}}\,\mathrm{R} - \pi}}\,\frac{(1 - \cos {}^{2}/_{\mathrm{n}}\mathrm{R})}{\cos {}^{2}/_{\mathrm{n}}\,\mathrm{R}}$

1031) $\mathrm{h\,i} = \sqrt{\frac{\mathrm{b\,h\,f\,a}\,.\,\mathrm{n}}{\mathrm{n}\,.\,\tan {}^{2}/_{\mathrm{n}}\,\mathrm{R} - \pi}}\,(1 - \cos {}^{2}/_{\mathrm{n}}\,\mathrm{R})$

1032) $\mathrm{bhf} = \sqrt{\frac{\mathrm{b\,h\,f\,a}\,.\,\mathrm{n}}{\mathrm{n}\,.\,\tan {}^{2}/_{\mathrm{n}}\,\mathrm{R} - \pi}}\,.\,\frac{2\,\pi}{\mathrm{n}}$

1033) $\mathrm{a\,c} = \sqrt{\frac{\mathrm{b\,h\,f\,a}\,.\,\mathrm{n}}{\mathrm{n}\,.\,\tan {}^{2}/_{\mathrm{n}}\,\mathrm{R} - \pi}}\,.\,2\tan {}^{2}/_{\mathrm{n}}\,\mathrm{R}$

1034) $\mathrm{a\,b} = \sqrt{\frac{\mathrm{b\,h\,f\,a}\,.\,\mathrm{n}}{\mathrm{n}\,.\,\tan {}^{2}/_{\mathrm{n}}\,\mathrm{R} - \pi}}\,.\tan {}^{2}/_{\mathrm{n}}\,\mathrm{R}$

1035) $2\pi\mathrm{r} = \sqrt{\frac{\mathrm{b\,h\,f\,a}\,.\,\mathrm{n}}{\mathrm{n}\,.\,\tan {}^{2}/_{\mathrm{n}}\,\mathrm{R} - \pi}}\,.\,2\,\pi$

1036) $\mathrm{b\,f} + \mathrm{f\,d} + \mathrm{d\,b} = \sqrt{\frac{\mathrm{b\,h\,f\,a}\,.\,\mathrm{n}}{\mathrm{n}\,.\,\tan {}^{2}/_{\mathrm{n}}\,\mathrm{R} - \pi}}\,.\,2\,\mathrm{n}\,.\sin {}^{2}/_{\mathrm{n}}\,\mathrm{R}$

1037) $\mathrm{a\,c} + \mathrm{c\,e} + \mathrm{e\,a} = \sqrt{\frac{\mathrm{b\,h\,f\,a}\,.\,\mathrm{n}}{\mathrm{n}\,.\,\tan {}^{2}/_{\mathrm{n}}\,\mathrm{R} - \pi}}\,.\,2\,\mathrm{n}\,.\tan {}^{2}/_{\mathrm{n}}\,\mathrm{R}$

1038) $\mathrm{b\,o} + \mathrm{o\,f} + \mathrm{f\,b} = \sqrt{\frac{\mathrm{b\,h\,f\,a}\,.\,\mathrm{n}}{\mathrm{n}\,.\,\tan {}^{2}/_{\mathrm{n}}\,\mathrm{R} - \pi}}\,.\,2\,(1 + \sin {}^{2}/_{\mathrm{n}}\,\mathrm{R})$

1039) $\mathrm{b\,i} + \mathrm{i\,o} + \mathrm{o\,b} = \sqrt{\frac{\mathrm{b\,h\,f\,a}\,.\,\mathrm{n}}{\mathrm{n}\,.\,\tan {}^{2}/_{\mathrm{n}}\,\mathrm{R} - \pi}}\,(1 + \sin {}^{2}/_{\mathrm{n}}\,\mathrm{R} + \cos {}^{2}/_{\mathrm{n}}\,\mathrm{R})$

1040) $\mathrm{a\,c} + \mathrm{c\,o} + \mathrm{o\,a} = \sqrt{\frac{\mathrm{b\,h\,f\,a}\,.\,\mathrm{n}}{\mathrm{n}\,.\,\tan {}^{2}/_{\mathrm{n}}\,\mathrm{R} - \pi}}\,.\,\frac{2\,(1 + \sin {}^{2}/_{\mathrm{n}}\,\mathrm{R})}{\cos {}^{2}/_{\mathrm{n}}\,\mathrm{R}}$

1041) $\mathrm{b\,o} + \mathrm{o\,c} + \mathrm{c\,b} = \sqrt{\frac{\mathrm{b\,h\,f\,a}\,.\,\mathrm{n}}{\mathrm{n}\,.\,\tan {}^{2}/_{\mathrm{n}}\,\mathrm{R} - \pi}}\,\frac{(1 + \sin {}^{2}/_{\mathrm{n}}\,\mathrm{R} + \cos {}^{2}/_{\mathrm{n}}\,\mathrm{R})}{\cos {}^{2}/_{\mathrm{n}}\,\mathrm{R}}$

1042) $\mathrm{a\,b} + \mathrm{b\,f} + \mathrm{f\,a} = \sqrt{\frac{\mathrm{b\,h\,f\,a}\,.\,\mathrm{n}}{\mathrm{n}\,.\,\tan {}^{2}/_{\mathrm{n}}\,\mathrm{R} - \pi}}\,.\,\frac{2\,(1 + \cos {}^{2}/_{\mathrm{n}}\,\mathrm{R})}{\cot {}^{2}/_{\mathrm{n}}\,\mathrm{R}}$

1043) $\mathrm{a\,b} + \mathrm{b\,i} + \mathrm{i\,a} = \sqrt{\frac{\mathrm{b\,h\,f\,a}\,.\,\mathrm{n}}{\mathrm{n}\,.\,\tan {}^{2}/_{\mathrm{n}}\,\mathrm{R} - \pi}}\,(1 + \sin {}^{2}/_{\mathrm{n}}\,\mathrm{R} + \cos {}^{2}/_{\mathrm{n}}\,\mathrm{R})$

Hosted by Google

1044) $\mathrm{bhf} + \mathrm{fo} + \mathrm{ob} = \sqrt{\frac{\mathrm{bhfa}\,.\,n}{n\,.\tan {}^{2}/_{n}\,R - \pi}}\,.\,\frac{2\,(\pi + n)}{n}$

1045) $\mathrm{bhf} + \mathrm{fb} = \sqrt{\frac{\mathrm{bhfa}\,.\,n}{n\,.\tan {}^{2}/_{n}\,R - \pi}}\,.\,\frac{2\,(\pi + n\,.\sin {}^{2}/_{n}\,R)}{n}$

1046) $\mathrm{ab} + \mathrm{bhf} + \mathrm{fa} = \sqrt{\frac{\mathrm{bhfa}\,.\,n}{n\,.\tan {}^{2}/_{n}\,R - \pi}}\,.\,\frac{2\,(\pi + n\,.\sin {}^{2}/_{n}\,R)}{n}$

1047) $\mathrm{ab} + \mathrm{bo} + \mathrm{of} + \mathrm{fa} = \sqrt{\frac{\mathrm{bhfa}\,.\,n}{n\,,\tan {}^{2}/_{n}\,R - \pi}}\,.\,2\,(1 + \tan {}^{2}/_{n}\,R)$

1048) $\triangle\,\mathrm{bof} = \mathrm{bhfa}\,.\,\frac{n\,.\sin {}^{2}/_{n}\,R\,.\cos {}^{2}/_{n}\,R}{n\,.\tan {}^{2}/_{n}\,R - \pi}$

1049) $\triangle\,\mathrm{bfd} = \mathrm{bhfa}\,.\,\frac{n^{2}\,.\sin {}^{2}/_{n}\,R\,.\cos {}^{2}/_{n}\,R}{n\,.\tan {}^{2}/_{n}\,R - \pi}$

1050) $\triangle\,\mathrm{aco} = \mathrm{bhfa}\,.\,\frac{n\,.\tan {}^{2}/_{n}\,R}{n\,.\tan {}^{2}/_{n}\,R - \pi}$

1051) $\triangle\,\mathrm{ace} = \mathrm{bhfa}\,.\,\frac{n^{2}\,.\tan {}^{2}/_{n}\,R}{n\,.\tan {}^{2}/_{n}\,R - \pi}$

1052) $\mathrm{bofh} = \mathrm{bhfa}\,.\,\frac{\pi}{n\,.\tan {}^{2}/_{n}\,R - \pi}$

1053) $\pi\,r^{2} = \mathrm{bhfa}\,\frac{\pi\,.\,n}{n\,.\tan {}^{2}/_{n}\,R - \pi}$

1054) $\mathrm{bhfi} = \mathrm{bhfa}\,.\,\frac{(\pi - n\,.\sin {}^{2}/_{n}\,R\,.\cos {}^{2}/_{n}\,R)}{n\,.\tan {}^{2}/_{n}\,R - \pi}$

1055) $\mathrm{bhfa} = \mathrm{bhfa}$ **1056)** $\triangle\,\mathrm{baf} = \mathrm{bhfa}\,.\,\frac{\sin {}^{2}/_{n}\,R\,.\tan {}^{2}/_{n}\,R}{n\,.\tan {}^{2}/_{n}\,R - \pi}$

1057) $\mathrm{bf} = \sqrt{\triangle\,\mathrm{baf}\,.\cot {}^{2}/_{n}\,R\,.\,2}$ **1058)** $\mathrm{bi} = \sqrt{\triangle\,\mathrm{baf}\,.\cot {}^{2}/_{n}\,R}$

1059) $\mathrm{bo} = \frac{\sqrt{\triangle\,\mathrm{baf}\,.\cot {}^{2}/_{n}\,R}}{\sin {}^{2}/_{n}\,R}$

1060) $\mathrm{io} = \sqrt{\triangle\,\mathrm{baf}\,.\cot {}^{2}/_{n}\,R\,.\cot {}^{2}/_{n}\,R}$

1061) $\mathrm{ao} = \frac{\sqrt{\triangle\,\mathrm{baf}\,.\cot {}^{2}/_{n}\,R}}{\sin {}^{2}/_{n}\,R\,.\cos {}^{2}/_{n}\,R}$

1062) $\mathrm{ai} = \frac{\sqrt{\triangle\,\mathrm{baf}\,.\cot {}^{2}/_{n}\,R}}{\cot {}^{2}/_{n}\,R} = \sqrt{\triangle\,\mathrm{baf}\,.\tan {}^{2}/_{n}\,R}$

1063) $\mathrm{ah} = \sqrt{\triangle\,\mathrm{baf}\,.\cot {}^{2}/_{n}\,R}\,\frac{(1 - \cos {}^{2}/_{n}\,R)}{\sin {}^{2}/_{n}\,R\,.\cos {}^{2}/_{n}\,R}$

Hosted by Google

1064) $h\,i = \sqrt{\triangle b\,a\,f \,.\, \cot {}^{2}/_{n}\,R}\,\dfrac{(1 - \cos {}^{2}/_{n}\,R)}{\sin {}^{2}/_{n}\,R}$

1065) $b\,h\,f = \sqrt{\triangle b\,a\,f \,.\, \cot {}^{2}/_{n}\,R}\,.\,\dfrac{2\,\pi}{n\,.\,\sin {}^{2}/_{n}\,R}$

1066) $a\,c = \sqrt{\triangle b\,a\,f \,.\, \cot {}^{2}/_{n}\,R}\,.\,\dfrac{2}{\cos {}^{2}/_{n}\,R}$

1067) $a\,b = \sqrt{\triangle b\,a\,f \,.\, \cot {}^{2}/_{n}\,R}\,.\,\dfrac{1}{\cos {}^{2}/_{n}\,R}$

1068) $2\,\pi r = \sqrt{\triangle b\,a\,f \,.\, \cot {}^{2}/_{n}\,R}\,.\,\dfrac{2\,\pi}{\sin {}^{2}/_{n}\,R}$

1069) $b\,f + f\,d + d\,b = \sqrt{\triangle b\,a\,f \,.\, \cot {}^{2}/_{n}\,R}\,.\,2\,n$

1070) $a\,c + c\,e + e\,a = \sqrt{\triangle b\,a\,f \,.\, \cot {}^{2}/_{n}\,R}\,.\,\dfrac{2\,n}{\cos {}^{2}/_{n}\,R}$

1071) $b\,o + o\,f + f\,b = \sqrt{\triangle b\,a\,f \,.\, \cot {}^{2}/_{n}\,R}\,.\,\dfrac{2\,(1 + \sin {}^{2}/_{n}\,R)}{\sin {}^{2}/_{n}\,R}$

1072) $b\,i + i\,o + o\,b = \sqrt{\triangle b\,a\,f \,.\, \cot {}^{2}/_{n}\,R}\,\dfrac{(1 + \sin {}^{2}/_{n}\,R + \cos {}^{2}/_{n}\,R)}{\sin {}^{2}/_{n}\,R}$

1073) $a\,c + c\,o + o\,a = \sqrt{\triangle b\,a\,f \,.\, \cot {}^{2}/_{n}\,R}\,.\,\dfrac{2\,(1 + \sin {}^{2}/_{n}\,R)}{\sin {}^{2}/_{n}\,R\,.\,\cos {}^{2}/_{n}\,R}$

1074) $b\,o + o\,c + c\,b = \sqrt{\triangle b\,a\,f \,.\, \cot {}^{2}/_{n}\,R}\,\dfrac{(1 + \sin {}^{2}/_{n}\,R + \cos {}^{2}/_{n}\,R)}{\sin {}^{2}/_{n}\,R\,.\,\cos {}^{2}/_{n}\,R}$

1075) $a\,b + b\,f + f\,a = \sqrt{\triangle b\,a\,f \,.\, \cot {}^{2}/_{n}\,R}\,.\,\dfrac{2\,(1 + \cos {}^{2}/_{n}\,R)}{\cos {}^{2}/_{n}\,R}$

1076) $a\,b + b\,i + i\,a = \sqrt{\triangle b\,a\,f \,.\, \cot {}^{2}/_{n}\,R}\,\dfrac{(1 + \sin {}^{2}/_{n}\,R + \cos {}^{2}/_{n}\,R)}{\cos {}^{2}/_{n}\,R}$

1077) $b\,h\,f + f\,o + o\,b = \sqrt{\triangle b\,a\,f \,.\, \cot {}^{2}/_{n}\,R}\,.\,\dfrac{2\,(\pi + n)}{n\,.\,\sin {}^{2}/_{n}\,R}$

1078) $b\,h\,f + f\,b = \sqrt{\triangle b\,a\,f \,.\, \cot {}^{2}/_{n}\,R}\,.\,\dfrac{2\,(\pi + n\,.\,\sin {}^{2}/_{n}\,R)}{n\,.\,\sin {}^{2}/_{n}\,R}$

1079) $a\,b + b\,h\,f + f\,a = \sqrt{\triangle b\,a\,f \,.\, \cot {}^{2}/_{n}\,R}\,.\,\dfrac{2\,.\,(\pi + n\,.\,\tan {}^{2}/_{n}\,R)}{n\,.\,\sin {}^{2}/_{n}\,R}$

1080) $a\,b + b\,o + o\,f + f\,a = \sqrt{\triangle b\,a\,f \,.\, \cot {}^{2}/_{n}\,R}\,.\,\dfrac{2\,(1 + \tan {}^{2}/_{n}\,R)}{\sin {}^{2}/_{n}\,R}$

1081) $\triangle b\,o\,f = \triangle b\,a\,f \,.\, \cot {}^{2}/_{n}\,\overline{R}^{2}$

1082) $\triangle b\,f\,d = \triangle b\,a\,f \,.\, n \,.\, \cot {}^{2}/_{n}\,\overline{R}^{2}$

1083) $\triangle a\,c\,o = \dfrac{\triangle b\,a\,f}{\sin {}^{2}/_{n}\,\overline{R}^{2}}$ **1084)** $\triangle a\,c\,e = \dfrac{\triangle b\,a\,f \,.\, n}{\sin {}^{2}/_{n}\,\overline{R}^{2}}$

Hosted by Google

1084) $\triangle\ a\,c\,e = \dfrac{\triangle\ b\,a\,f\,.\,n}{\sin^{\,2}/_{n}\,R}$

1085) $b\,o\,f\,h = \triangle\ b\,a\,f\,.\,\dfrac{\pi\,.\,\cot^{\,2}/_{n}\,R}{n\,.\,\sin^{\,2}/_{n}\,R}$

1086) $\pi\,r^{2} = \triangle\ b\,a\,f\,.\,\dfrac{\pi\,.\,\cot^{\,2}/_{n}\,R}{\sin^{\,2}/_{n}\,R}$

1087) $b\,h\,f\,i = \triangle\ b\,a\,f\,\dfrac{(\pi - n\,.\,\sin^{\,2}/_{n}\,R\,.\,\cos^{\,2}/_{n}\,R)}{n\,.\,\sin^{\,2}/_{n}\,R\,.\,\tan^{\,2}/_{n}\,R}$

1088) $b\,h\,f\,a = \triangle\ b\,a\,f\,\dfrac{(n - \pi\,.\,\cot^{\,2}/_{n}\,R)}{n\,.\,\sin^{\,2}/_{n}\,R}$

1089) $\triangle\ b\,a\,f = \triangle\ b\,a\,f.$

Hosted by Google

Lehrsätze.

I. Die Inhalte zweier regelmäßigen Polygone, welche einen gleichen Umfang haben, verhalten sich zu einander, erstens wie ihre kleinen Halbmesser und zweitens wie ihre großen Halbmesser multiplicirt jeder mit dem Cosinus des halben Centriwinkels.

Beweis. Es war nach der 59. Formel $\triangle \mathrm{bfd} = \overset{-2}{\mathrm{bi}} . \mathrm{n} . \cot {}^2/_{\mathrm{n}} \mathrm{R}$, also auch ein anderes regelmäßiges Polygon von verschiedener Seitenanzahl $\beta\varphi\delta = \overset{-2}{\beta\iota} . \nu . \cot {}^2/_{\nu} \mathrm{R}$, folglich hat man: $\mathrm{bfd} : \beta\varphi\delta = \overset{-2}{\mathrm{bi}} . \mathrm{n} . \cot {}^2/_{\mathrm{n}} \mathrm{R} : \overset{-2}{\beta\iota} . \nu . \cot {}^2/_{\nu} \mathrm{R}$. Da die Polygone gleichen Umfang haben sollen, so ist $2\,\mathrm{n} . \mathrm{bi} = 2\,\nu . \beta\iota$, oder $\mathrm{n} . \mathrm{bi} = \nu . \beta\iota$, daher ist $\mathrm{bfd} : \beta\varphi\delta = \mathrm{bi} . \cot {}^2/_{\mathrm{n}} \mathrm{R} : \beta\iota . \cot {}^2/_{\nu} \mathrm{R}$. Nun ist nach Formel 37 $\mathrm{bi} . \cot {}^2/_{\mathrm{n}} \mathrm{R} = \mathrm{io}$, also auch $\beta\iota . \cot {}^2/_{\nu} \mathrm{R} = \iota\omega$, mithin ist auch $\mathrm{bfd} : \beta\varphi\delta = \mathrm{io} : \iota\omega$. Es ist aber io der kleine Halbmesser des Polygons bfd und $\iota\omega$ der kleine Halbmesser des Polygons $\beta\varphi\delta$.

Zweitens ist nach der 70. Formel $\mathrm{io} = \mathrm{bo} . \cos {}^2/_{\mathrm{n}} \mathrm{R}$, also auch $\iota\omega = \beta\omega . \cos {}^2/_{\nu} \mathrm{R}$. Daher auch $\mathrm{bfd} : \beta\varphi\delta = \mathrm{bo} . \cos {}^2/_{\mathrm{n}} \mathrm{R} : \beta\omega . \cos {}^2/_{\nu} \mathrm{R}$. bo und $\beta\omega$ sind die großen Halbmesser der Polygone bfd und $\beta\varphi\delta$.

II. Der Kreis hat einen größern Inhalt, als jedes regelmäßige Polygon gleichen Umfangs mit ihm.

Beweis. Da der Umfang eines in einem regulären Polygon eingeschriebenen Kreises stets kleiner ist, als der des Polygons, und da der Umfang des um das Polygon beschriebenen Kreises immer größer ist, als der Umfang desselben Polygons, so muß der Halbmesser eines solchen Kreises, welcher einen gleichen Umfang mit dem des Polygons haben soll, auch größer sein, als der Halbmesser jedes eingeschriebenen und kleiner als der Halbmesser jedes umgeschriebenen Kreises. Bei gleichem Umfange hat daher ein Kreis einen größern Halbmesser als jedes andere reguläre Polygon, wenn dieser durch die [eingeschriebenen] kleinern ausgedrückt wird. Weil sich nun die Inhalte zweier Polygone von denselben Umfängen zu einander verhalten wie die kleinen Halbmesser, und der Kreis

Hosted by Google

als ein Polygon von unendlich vielen Seiten betrachtet werden kann, wo der große Halbmesser gleich dem kleinen ist, so muß auch der Inhalt des Kreises größer sein, als der jedes andern Polygons von demselben Umfange.

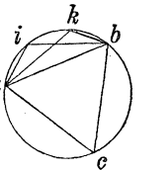
III. Von zwei regelmäßigen Polygonen, welche einen gleichen Umfang haben, hat dasjenige den größern Inhalt, welches die meisten Seiten enthält.

Beweis. Weil von zwei regulären Polygonen, von denen das eine doppelt so viele Seiten hat als der andere in ein und demselben Kreise das doppelseitige einen größern Umfang hat als das andere, so muß für ein solch doppelseitiges Polygon, welches einen gleichen Umfang mit dem einseitigen haben soll, der umgeschriebene Kreis kleiner sein, und diese Kreise nehmen daher mit der Anzahl der Seiten stets ab. Deßhalb nehmen auch die Halbmesser der umgeschriebenen Kreise mit der Verdoppelung der Seiten ab. Weil zweitens der Umfang eines regulären Doppelecks, welches um einen Kreis beschrieben ist, bekanntlich kleiner ist, als der Umfang des regulären halbseitigen, indem so viele Dreiecke abgeschnitten wurden, als Seiten hinzukamen, so muß zu einem solchen regulären Doppeleck, dessen Umfang gleich dem des halbseitigen Vielecks sein soll, ein größerer berührender innerer Kreis, das heißt also ein größerer Abstand vom Mittelpunkt oder ein größerer Halbmesser erforderlich sein, als zu dem Polygon gleichen Umfangs, welches mit jenem die Hälfte der Seiten enthält. Deßhalb nehmen die innern berührenden Kreise und folglich auch ihre Halbmesser mit der Seitenanzahl zu.

Da sich nun die Inhalte zweier regulärer Polygone von gleichen Umfängen zu einander verhalten, wie ihre kleinen Halbmesser, so hat von zwei Polygonen, die im Verhältniß der doppelten Seitenanzahl zu einander stehen, dasjenige den größern Inhalt, welches die meisten oder doppelten Seiten enthält. Die Inhalte nehmen daher mit der Verdoppelung der Seiten zu.

Eben dieses findet aber auch bei einer jeden Vervielfachung statt. Zum Beispiel (s. Fig. 2) es sei a b c ein in einem Kreise eingeschriebenes reguläres Dreieck, so würde ein reguläres Neuneck in demselben einen größeren Umfang haben müssen, als das Dreieck, weil $a k + k b > a b$ und $a k < a i + i k$, daher auch $a i + i k + k b > a b$, und $3(a i + i k + k b) > 3 a b$. Mithin muß zu einem solchen regulären Neuneck, welches gleichen Umfang haben soll mit einem Dreieck, der umgeschriebene Kreis kleiner sein.

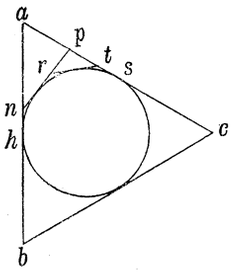
Fig. 2.



Zweitens (s. Fig. 3) sei a b c ein um einen Kreis beschriebenes, reguläres Dreieck, dann würde das reguläre Neuneck um denselben einen kleinern Umfang haben müssen, als das Dreieck. Denn es ist $n p < n a + a p$, also $h a + a s > h n + n p + p s$; ferner ist wieder $n p + p s >$

Hosted by Google

Fig. 3.

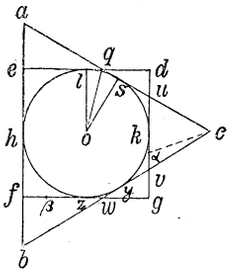


$nr+rt+ts$, weil $rt<rp+pt$ ist. Daher auch $hn+nr+rt+ts<ha+as$; $3(hn+nr+rt+ts)<3(ha+as)$, oder das Neuneck, dessen Umfang dem des Dreiecks gleich sein soll, muß einen größern berührenden innern Kreis haben, als das Dreieck. Also ist auch der Inhalt des Neunecks bei gleichem Umfange größer als der des Dreiecks.

Wenn es also in solchen Fällen für eine ausgemachte Wahrheit gilt, daß bei zunehmender Seitenanzahl die innern Kreise wachsen bis zu dem größten innern, welcher mit demjenigen Kreise einerlei ist, der mit den gegebenen Polygonen gleichen Umfang hat, so ließe sich daraus beurtheilen, daß auch bei solchen Polygonen, die kein Verhältniß der Theilung zu einander haben, wie ein Neuneck und ein Achteck, oder ein Viereck und ein Dreieck, Elfeck und Siebeneck dasjenige den größern Inhalt bei gleichem Umfange haben müsse, welches die meisten Seiten enthält, und nicht einmal, während doch im Ganzen die innern Kreise am Zunehmen sind, einmal in besonderen Fällen dennoch bei steigender Anzahl der Seiten sich gleich blieben, oder das Mehreck sogar einen kleinern innern Kreis erhielte. Daß aber dieses nie der Fall sein kann, ergibt sich aus folgender Betrachtung.

Es gibt so viele vorstehende kleine Dreiecke des Mehrecks bei regulären Polygonen, deren Seitenanzahl um eins verschieden ist, um ein und denselben Kreis, als Dreiecke des Wenigerecks aus dem Mehreck heraus stehen weniger eins. Nun läßt sich zeigen, daß jedes Dreieck des Mehrecks kleiner ist, als jedes folgende des Wenigerecks, so daß noch ein Dreieck des Wenigerecks übrig bleibt, also auch Inhalt des Mehrecks kleiner als des Wenigerecks. Zum Beispiel (s. Fig. 4) beim regulären Viereck und Dreieck um denselben Kreis, $edgf$ und abc zwei vorstehende kleine Dreiecke des Vierecks qdu und vgw, und drei des Dreiecks aeq, ucv, wfb. Zuerst ist hier $\triangle qdu < \triangle ucv$, denn $< qud = < vuc$ als Scheitelwinkel, uq fällt der Lage nach auf uv, und ud auf uc. Nun ist Bogen $hs = 120^0$, $hl = 90^0$, also $ls = 30^0$. Verbände man l mit o, o mit q, und s mit o, so wird $\triangle loq \cong \triangle qos$, denn $lo = os$, $oq = oq$, $< olq = < osq$ als rechte, daher auch $lq = qs$, $< loq = < qos = 15^0$. Ferner ist $sk = 180^0 - 120^0 = 60^0$, und da $su = uk$ aus demselben Grunde, wie früher $lq = qs$ war, so ist auch sowohl su als $ku = \tan 30^0$. Mithin $qu = qs + su = \tan 15^0 + \tan 30^0$. Weil $hsy = 240^0$, so ist $yk = hsy - hsk = 240^0 - 180^0$, oder $yk = 60^0$, also sowohl yv als

Fig. 4.

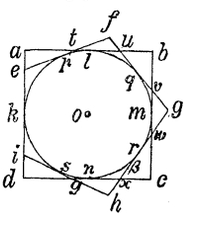


Hosted by Google

$vk = \tan 30^0$. Weil aber $\tan 30 > \tan 15^0$, so muß auch $uv > qu$ sein. Folglich läßt sich von der größern Seite uv ein Stück von u aus abschneiden gleich uq. Dieses wäre $u\alpha$. Verbände man α mit c, so würde der $< \alpha cu$ kleiner werden als der des Wenigerecks $< c$. Da aber der Polygonwinkel des Mehrecks größer ist als der des Wenigerecks, so darf auch qd die uc weder in c noch auf der Verlängerung treffen, sondern der stumpfere Winkel des Mehrecks, $< d$ kann von α aus beschrieben auf uc nur zwischen u und c sich befinden. Mithin läßt sich das vorstehende Dreieck des Mehrecks nemlich qud ganz in das folgende des Wenigerecks ucv legen. und füllt den Raum nicht aus, oder $\triangle qud < \triangle uvc$. Ebenso muß $\triangle vwg < \triangle wfb$ sein. Denn es ist $< vwg = < fwb$, $yv = kv = \tan 30^0$, ferner Bogen $zy = hy - hz = 120^0 - 90^0 = 30^0$, also auch $yw = wz = \tan 15^0$, und da $zf = fh$, aber $hz = 90^0$, so ist jedes zf sowohl als $fh = \tan 45^0$. Nun ist $\tan 45^9 + \tan 15^0 > \tan 15^0 + \tan 30^0$, oder $fw > wv$. Mithin läßt sich von wf ein Stück von w aus gleich wv abschneiden. Dies sei $w\beta$. Da nun wg auch weil $< vwg = < fwb$, der Lage nach auf wb fällt, der Winkel g aber als Polygonwinkel des Mehrecks größer ist als $< b$, der Polygonwinkel des Wenigerecks, so würde β mit b verbunden einen zu spitzen Winkel geben, ebenso β mit der Verlängerung über b Um also ein Dreieck aus β zu beschreiben, das mit wvg congruent ist, muß die Seite aus β die gegenüberliegende wb weder in b noch auf der Verlängerung derselben treffen, sondern die bw zwischen b und w erreichen. Das Dreieck des Mehrecks also wvg läßt sich in das vorstehende folgende Dreieck des Wenigerecks bfw wiederum hineinlegen, und füllt den Raum nicht aus. Also füllt auch das ganze Mehreck den Raum des Wenigerecks nicht aus, das Viereck $edgf$ das $\triangle abc$ nicht aus, und deßhalb ist der Inhalt des Vierecks $edgf$ kleiner als der Inhalt des Dreiecks abc. Oder es ist $n.he.ho < \nu.ah.ho$, d. h. also $4he.ho < 3ah.ho$, also auch $n.he < \nu.ah$, der halbe Umfang des Mehrecks kleiner als der halbe Umfang des Wenigerecks. Mithin muß zu einem solchen Viereck, welches einen gleichen Umfang mit dem regulären Dreieck haben soll, der innere berührende Kreis größer sein. Bei gleichem Umfange wachsen daher mit der Anzahl der Seiten die kleinen Halbmesser, und daher auch die Inhalte.

Zweitens (s. Fig. 5) sei $abcd$ ein reguläres Viereck um einen Kreis, und $efghi$ ein reguläres Fünfeck um denselben, so sind die drei vorstehenden kleinen Dreiecke des Fünfecks zusammen kleiner als die Summe dreier folgenden des Vierecks, $tfu + vgw + xhy < ubv + wxc + yid$, also auch Viereck größer als Fünfeck.

Fig. 5.



Zuerst ist $lu = uq, pl = 90^0 - 72 = 18^0$, also

$t\,l = \tan 9^0$, und $q\,m = 180^0 - 144^0$, oder $q\,m = 36^0$, also $q\,v = \tan 18^0$, und daher $u\,v > u\,t$, und weil $< b\,u\,v = < f\,u\,t$, der Winkel $u\,f\,t$ stumpfer als $< v\,b\,u$, so fällt das Dreieck $u\,t\,f$ wieder in das $\triangle u\,v\,b$ hinein, und füllt den Raum nicht aus. Ferner ist $m\,w = w\,r$, aber $m\,v = q\,v = \tan 18^0$, aber $r\,x = \tan . \frac{144 - 90}{2} = \tan 27^0$, also $w\,x > v\,w$, daher auch $\triangle w\,x\,c > \triangle w\,v\,g$. Endlich ist $n\,y = y\,s$, aber $s\,i = \tan 36^0 > n\,x$. oder da $n\,x = x\,r = \tan 27^0$, $y\,i > y\,x$, mithin $\triangle y\,i\,d > \triangle y\,x\,h$. Das ganze Fünfeck läßt sich also in das Viereck hineinlegen, und füllt den Raum nicht aus. Also auch $5\,k\,e\,.\,k\,o < 4\,a\,k\,.\,k\,o$, und $5\,k\,e < 4\,a\,k$, oder $10\,k\,e < 8\,a\,k$, der Umfang des Fünfecks um denselben Kreis kleiner als der des Vierecks. Daher hat das reguläre Fünfeck gleichen Umfangs mit dem regulären Viereck einen größern innern berührenden Kreis, und auch hier wachsen die kleinen Halbmesser und also die Inhalte mit der Anzahl der Seiten.

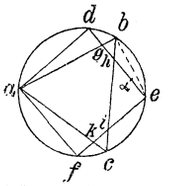
Allgemein. Es sei $a\,b\,c$ ꝛc. ꝛc. ein reguläres neck um einen Kreis beschrieben, $e\,f\,g$ ꝛc. ꝛc. ein reguläres $n + 1$eck um denselben Kreis, so ist wieder ein vorstehendes kleineres Dreieck des Mehrecks kleiner als das folgende vorstehende des Wenigerecks, so daß sich nach und nach das Mehreck in das Wenigereck legen läßt, und den Raum nicht ausfüllt. Z. B. das mte Dreieck $v\,w\,g$ des Mehrecks $(n + 1)$ecks in das mte Dreieck des Weniger-(n)ecks. Nemlich es ist $w\,r = w\,m$, aber der Bogen $q\,r < m\,n$, der Bogen zwischen Tangenten des Mehrecks kleiner als der zwischen Tangenten des Wenigerecks, weil $(n + 1)\,x = 360^0 = n\,.\,y$, also $x < y$. Nun enthalten zwei solcher Bogen $q\,r$ und $m\,n$ einen gemeinsamen $m\,r$, da also $q\,r < m\,n$, auch $q\,r - m\,r < m\,n - m\,r$, oder $q\,m < r\,n$, daher auch $\tan {}^1/_2\,q\,m < \tan {}^1/_2\,r\,n$; $\tan {}^1/_2\,q\,m + \tan {}^1/_2\,m\,r < \tan {}^1/_2\,r\,n + \tan {}^1/_2\,m\,r$, d. i. $v\,w < w\,x$. Mithin läßt sich von $w\,x$ ein Stück von w aus abschneiden, gleich $v\,w$. Dieses sei $w\,\beta$. Weil nun das auf $w\,x$ zu beschreibende frühere kleinere Dreieck des Mehrecks ein stumpfwinkeligeres ist, als $w\,x\,c$, so darf β weder mit c noch mit der Verlängerung von $w\,c$ verbunden werden, sondern nur dasjenige Dreieck wird dem kleineren früheren des Mehrecks congruent werden, dessen Seite aus β gezogen die $w\,c$ zwischen w und c erreicht. Also muß auch ein früheres vorstehendes kleineres Dreieck eines Mehr-$(n + 1)$ecks kleiner sein, als ein folgendes eines Weniger-(n)ecks; mithin die Summe der kleineren Dreiecke des $(n + 1)$ecks, deren es eins weniger gibt, noch weniger als die Summe der kleineren aus dem Mehrecke herausstehenden Dreiecke des Wenigerecks, also Inhalt des $(n + 1)$ecks um denselben Kreis kleiner als Inhalt des necks, oder $n\,.\,x\,.\,r < \varrho\,.\,y\,.\,r$, also $n\,.\,x < \varrho\,.\,y$; $2\,n\,.\,x < 2\varrho\,.\,y$, oder der Umfang des $(n + 1)$ecks um denselben Kreis kleiner als der Umfang des necks. Daher muß zu einem solchen $(n + 1)$eck, wel-

Hosted by Google

ches einen gleichen Umfang haben soll mit einem regulären neck, ein größerer berührender innerer Kreis erforderlich sein, als zu dem neck. Da sich nun bei gleichem Umfange die Inhalte zweier regulärer Polygone zu einander verhalten, wie die kleinen Halbmesser, so muß das (n + 1)eck gleichen Umfangs auch einen größeren Inhalt haben, als das neck.

Wenn nun bei gleichem Umfange mit der Anzahl der Seiten die innern Kreise oder Halbmesser wachsen, so fragt sich, ob auch die umgeschriebenen Kreise bei solchen mehranzahligen Polygonen kleiner werden, oder entweder dieselben bleiben, oder gar größer einmal werden können. — Wir betrachten zwei verschiedenanzahlige Polygone in ein und demselben Kreise beschrieben. Hier gibt es so viele vorstehende kleine Dreiecke des Wenigerecks, als kleine Dreiecke des Mehrecks aus dem Wenigereck herausstehen weniger eins. Nun läßt sich zeigen, daß ein Dreieck des Wenigerecks kleiner ist als das folgende des Mehrecks, so daß noch ein Dreieck des Mehrecks übrig bleibt, also Inhalt des Wenigerecks kleiner als Inhalt des Mehrecks. (S. Fig. 6.) Zuerst muß $\triangle gbh < \triangle hei$ sein. Denn verbände man b mit e, so wird $< deb$ auf Bogen $db = 120^0 - 90^0 = 30^0$, aber $< cbe$ auf Bogen $ce = 180^0 - 120^0 = 60^0$. Daher ist $< deb$ kleiner als $< cbe$, also auch $bh < he$. Also läßt sich von he ein Stück abschneiden gleich bh. Dieses sei $h\alpha$.

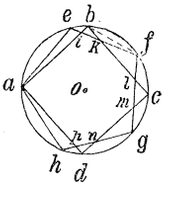
Fig. 6.



Weil nun $\triangle gbh$ ein spitzwinkeligeres Dreieck ist als hei bei e, so darf die aus α zu beschreibende Seite eines mit bgh congruenten Dreiecks die ei weder berühren noch schneiden, sondern das $\triangle ghb$ läßt sich in das $\triangle hei$ hineinlegen, und füllt den Raum nicht aus. Ebenso muß $\triangle kic < \triangle kfa$ sein. Denn zöge man fc, so ist $< acf$ auf 90^0, $< kfc$ auf $180^0 - 120^0 = 60^0$, also $acf > kfc$, also auch Seite $kf > kc$. Mithin läßt sich von kf ein Stück gleich kc abschneiden, und weil $\triangle kic$ ein spitzwinkeligeres ist als afk, füllt ein gleiches Dreieck mit kic den Raum von afk nicht aus. Also füllt auch das ganze Dreieck den Raum des Vierecks nicht aus, und es ist daher der Inhalt des Dreiecks in demselben Kreise kleiner als der Inhalt des Vierecks.

Ferner (s. Fig. 7) sei abcd ein reguläres Viereck in einem Kreise beschrieben, und in demselben aefgh ein reguläres Fünfeck, so werden die drei vorstehenden Dreiecke des Vierecks bik + lcm + pnd kleiner sein als drei des Fünfecks kfl + mng + aph, also Viereck kleiner als Fünfeck. Denn zöge man bf, so ist $< fbk$ auf Bogen fc gleich $180^0 - 144^0 = 36^0$, und $< bfk$ auf Bogen be gleich $90^0 - 72^0 = 18^0$, also $fbk > bfk$, daher auch Seite kf größer als bk. Wenn also von kf ein Stück gleich bk abgeschnitten würde, so füllt ein mit bik gleiches

Fig. 7.



Dreieck den Raum von k f l nicht aus, ragt auch nicht aus demselben hervor, weil △ i b k ein spitzwinkeligeres Dreieck als k f l, also f l nicht geschnitten noch erreicht werden kann. Zweitens ist in dem △ l m c die Seite c m kleiner als in dem △ m n g die Seite m g. Denn zöge man c g, so ist < c g m auf Bogen f c = 180° — 144° = 36° und < m c g auf Bogen d g gleich 144° — 90° = 54°, also m c g > c g m, daher m g > m c. Mithin läßt sich von m g ein Stück abschneiden gleich m c, und da △ l c m ein spitzwinkeligeres ist als △ m g n, muß auch l m < m n sein, also △ m l c < △ m g n. Drittens wenn man h mit d verbindet, so ist < p d h auf 72°, p h d auf 144° — 90° = 54°, also p h > p d, und da das Dreieck p d n ein spitzwinkeligeres als △ a h p, füllt es den Raum des letztern nicht aus. Also ist auch der Inhalt des ganzen Vierecks kleiner als der des Fünfecks.

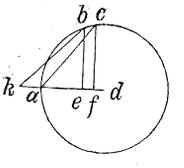
Allgemein. Es sei a b c ꝛc. ꝛc. ein reguläres neck in einem Kreis beschrieben, a e f ꝛc. ꝛc. ein reguläres (n + 1)eck in demselben Kreis, so wird ein vorstehendes kleines Dreieck z. B. das mte des necks, dieses sei l m c kleiner sein, als das folgende mte Dreieck des (n + 1)ecks, dieses sei m g n. Die Spitze des kleineren Dreiecks des Wenigerecks, nemlich c von l m c ist in dem Kreisausschnitt von der Seite des Mehrecks enthalten, zwischen f g, und die Spitze des kleinern hervorstehenden Dreiecks des Mehrecks, nemlich g, ist in dem Kreisausschnitt von der Seite c d des Wenigerecks enthalten. Nun ist Seite des Mehrecks kleiner als des Wenigerecks Seite, oder f g < c d, weil erstere $\frac{360^0}{n+1}$, zweitere $\frac{360^0}{n}$ ausschneidet. Also auch Bogen f g < Bogen c d. Diese haben immer einen gemeinsamen Bogen c g zwischen den beiden Spitzen der kleineren Dreiecke, daher f c < g d. Zöge man die Verbindung der Spitzen c g, so würde auch Peripheriewinkel auf f c kleiner werden als Peripheriewinkel auf g d, also auch m g > m c. Da nun das kleinere Dreieck des Wenigerecks ein spitzwinkeligeres ist als das des Mehrecks, so füllt ein in das vorstehende folgende Dreieck des Mehrecks hineingelegtes voriges Dreieck des Wenigerecks den Raum nicht aus. Weil nun dieses allgemein von jedem Dreieck des Mehr- und dem des Wenigerecks gilt, aber alle vorstehende Dreiecke des Wenigerecks die Räume so vieler vorstehender Dreiecke des Mehrecks, deren es auch noch eins mehr gibt, nicht ausfüllen, noch auch irgend aus denselben herausragen, sondern ganz darinnen enthalten sein müssen, und weil der übrige Inhalt und Umfang des Wenigerecks gemeinsamer Theil des Mehrecks ist, so hat nothwendigerweise ein in einem Kreise beschriebenes reguläres (n + 1)eck einen größern Inhalt, als ein in demselben Kreise beschriebenes reguläres

Hosted by Google

neck. In demselben Kreise wachsen daher die Inhalte regulärer Polygone mit der Anzahl der Seiten.

Was nun die Umfänge betrifft der regulären Polygone in demselben Kreise von verschiedener Seitenanzahl, so müßte, wenn sie gleich sein sollten, $n \cdot bf = \nu \cdot \beta\varphi$ sein, oder da nach Formel 67 $bf = bo \cdot 2 \cdot \sin {}^2/_n R$, und also auch $\beta\varphi = \beta\omega \cdot 2 \cdot \sin {}^2/_\nu R$ ist, $n \cdot r \cdot \sin {}^2/_n R = \nu \cdot r \cdot \sin {}^2/_\nu R$ sein, daher $n : \nu = r \cdot \sin {}^2/_\nu R : r \cdot \sin {}^2/_n R$. Auch hat man nach der 75 Formel $bhf = bo \cdot \frac{2\pi}{n}$, und also auch $\beta\vartheta\varphi = \beta\omega \frac{2\pi}{\nu}$, daher $bhf : \beta\vartheta\varphi = {}^1/_n : {}^1/_\nu = \nu : n$, mithin müßte auch $r \cdot \sin {}^2/_n R : r \cdot \sin {}^2/_\nu R = bhf : \beta\vartheta\varphi$ sein, also die Sinus verschiedener Bogen desselben Kreises sich zu einander verhalten, wie die Bogen, welches unmöglich; sondern das Verhältniß der Sinus ist immer größer als das der Bogen; der Sinus von 30^0 ist $^1/_2 r$, von 90^0 ist r, also $\sin 30^0 : \sin 90^0 = 1 : 2$, während die Bogen $30^0 : 90^0$ wie $1 : 3$ sich verhalten. (S. Fig. 8).

Fig. 8.



Der Sinus von ab ist be, von ac ist cf, das $\triangle bke \sim \triangle caf$, also auch $be : cf = bk : ca$, und größer als $ba : ca$, weil be senkrecht auf dak, also kleiner als jede andere Linie von b aus auf dk, und unter den übrigen ist diejenige stets die größte, welche weiter von der senkrechten absteht, also $bk > ba$. Mithin ist das Verhältniß der Sinus der Bogen zu einander größer als das der Sehnen $be : cf > ba : ca$. Aber die Sehnen verhalten sich zu einander wie die Bogen; der wievielte Theil eine Sehne zu einem regulären Vieleck ist, der so vielte ist ein Bogen zu einer ganzen Peripherie; die Seite des Fünfecks ist der fünfte Theil des Umfangs von dem Fünfeck, und der Bogen, welcher auf dieser Seite enthalten ist, ist der fünfte Theil der ganzen Peripherie des Kreises. Da also auch $bhf : \beta\vartheta\varphi$ nicht wie $r \cdot \sin {}^2/_n R : r \cdot \sin {}^2/_\nu R$ sich verhalten darf, so können auch nicht einmal in demselben Kreise zwei oder mehrere reguläre Polygone verschiedener Seitenanzahl gleichen Umfang enthalten. — Wäre aber einmal in demselben Kreise der Umfang eines Mehrecks kleiner als der eines Wenigerecks, also $n \cdot bf < \nu \cdot \beta\varphi$, so ist auch $n \cdot r \cdot \sin {}^2/_n R < \nu \cdot r \cdot \sin {}^2/_\nu R$; $n : \nu > r \cdot \sin {}^2/_\nu R : r \cdot \sin {}^2/_n R$, und $r \cdot \sin {}^2/_n R : r \cdot \sin {}^2/_\nu R < \nu : n$, daher auch, weil $bhf : \beta\vartheta\varphi = \nu : n$ sich verhält, müßte $r \cdot \sin {}^2/_n R : r \cdot \sin {}^2/_\nu R < bhf : \beta\vartheta\varphi$, und also auch die Sinus zu einander kleiner sich verhalten, als die Sehnen der Bogen, welches unmöglich, da so eben gezeigt wurde, daß die Sinus ein größeres Verhältniß zu einander hätten als die Sehnen.

Da also in demselben Kreise der Umfang des Mehrecks nicht kleiner sein darf, als der des Wenigerecks, auch nicht gleich mit diesem, so muß nothwendigerweise das Mehreck einen größern

Hosted by Google

Umfang haben, als das Wenigereck. Daher muß zu einem solchen Mehreck, welches einen gleichen Umfang haben soll mit einem Wenigereck, ein kleinerer umschriebener Kreis erforderlich sein als zu dem Wenigereck. Mit der Anzahl der Seiten nehmen daher die umgeschriebenen Kreise regelmäßig ab bis zu dem kleinsten umgeschriebenen des Kreises, welcher mit dem größten eingeschriebenen des Kreises und mit dem Kreise selbst einerlei ist.

Der Halbmesser des umgeschriebenen Kreises um ein mehranzahliges Polygon ist daher immer kleiner als der des umgeschriebenen Kreises um ein minderanzahliges Polygon gleichen Umfangs mit jenen. Mithin lassen sich um keinen einzigen Kreis noch auch in einem einzigen Kreis zwei oder mehrere Polygone gleichen Umfangs beschreiben, welche eine verschiedene Seitenanzahl unter einander enthalten.

Unter allen regelmäßigen Polygonen gleichen Umfangs hat das Dreieck den größten umgeschriebenen und den kleinsten eingeschriebenen Kreis, und wie die Zahl der Seiten zunimmt, nehmen die umgeschriebenen Kreise immer regelmäßig ab, und die eingeschriebenen zu, bis sie sich in einem einzigen Kreise vereinigen, demjenigen, welcher mit den Polygonen gleichen Umfang hat.

Zusatz. In demselben Kreise hat das Wenigereck einen kleineren Inhalt als das Mehreck, um denselben Kreis einen größeren, wenn beide sowohl Wenigereck als Mehreck regulär sein sollen.

IV. Das Verhältniß des Umfangs eines regulären Mehrecks zu dem eines Wenigerecks in demselben oder gleichem Kreise ist größer als das der Secanten, und kleiner als das der Cosinus zu einander. Auch beträgt das Verhältniß der Umfänge zu einander weniger als das der Inhalte der Polygone, und weniger als das der Wurzeln dieser Inhalte.

Beweis. Nach der 92. Formel ist $\triangle bfd = bo^{-2}.n.\sin {}^2/_n R.\cos^2/_n R$ und nach Formel 79 ist $bf + fd + db = bo.2n.\sin.{}^2/_n R$, daher auch $bfd = bo.\cos {}^2/_n R.{}^1/_2 (bf + fd + db)$, also auch ein anderes Polygon verschiedener Seitenanzahl $\beta\varphi\delta = \beta\omega.\cos {}^2/_\nu R(\beta\varphi + \varphi\delta + \delta\beta)$; mithin wenn die Polygone in demselben Kreise einbeschrieben sind, hat man $bfd : \beta\varphi\delta = (bf + fd + db)\cos {}^2/_n R : (\beta\varphi + \varphi\delta + \delta\beta)\cos {}^2/_\nu R$. Da dann auch nach dem vorigen Satze das mehranzahlige Polygon bfd einen größern Inhalt hat als das minderanzahlige $\beta\varphi\delta$, so muß auch $(bf + fd + db)\cos {}^2/_n R > (\beta\varphi + \varphi\delta + \delta\beta)\cos {}^2/_\nu R$ sein, oder $\frac{bf+fd+db}{\beta\varphi+\varphi\delta+\delta\beta} > \frac{\cos^2/_\nu R}{\cos^2/_n R}$, d. i. $bf+fd+db : \beta\varphi + \varphi\delta + \delta\beta > \sec {}^2/_n R : \sec {}^2/_\nu R$.

Hosted by Google

Ferner ist nach der 820. Formel $\triangle a c e = \frac{\triangle b o f . n}{\cos^{2}/_{n} R}$. Also bei demselben Kreise, wenn zugleich $n > \nu$ ist, hat man daher auch $a c e : \alpha \gamma \varepsilon = \frac{n . b o f}{\cos^{2}/_{n} R} : \frac{\nu . \beta \omega \varphi}{\cos^{2}/_{\nu} R}$, und weil $a c e < \alpha \gamma \varepsilon$ nach dem frühern Satze, der Inhalt so wie der Umfang des Mehrecks um denselben Kreis kleiner als der Inhalt und der Umfang des Wenigerecks, so ist auch $\frac{n . b o f}{\nu . \beta \omega \varphi} < \frac{\cos^{2}/_{n} R}{\cos^{2}/_{\nu} R}$, oder $\frac{n . b i . i o}{\nu . \beta \iota . \iota \omega} < \frac{\cos^{2}/_{n} R}{\cos^{2}/_{\nu} R}$. Nun ist nach Formel 70 auch $i o = b o . \cos^{2}/_{n} R$, also auch $\iota \omega = \beta \omega . \cos^{2}/_{\nu} R = b o . \cos^{2}/_{\nu} R$, mithin $\frac{n . b i}{\nu . \beta \iota} < \frac{\cos^{2}/_{n} R}{\cos^{2}/_{\nu} R}$, d. i. $b f + f d + d b : \beta \varphi + \varphi \delta + \delta \beta < \cos^{2}/_{n} R : \cos^{2}/_{\nu} R$.

Zweitens da auch nach der 68. Formel $b i = b o . \sin^{2}/_{n} R$, und also $\beta \iota = \beta \omega . \sin^{2}/_{\nu} R = b o . \sin^{2}/_{\nu} R$ bei demselben Kreise, so ist $n . \sin^{2}/_{n} R . \cos^{2}/_{n} R : \nu . \sin^{2}/_{\nu} R . \cos^{2}/_{\nu} R = b f d : \beta \varphi \delta$. Da nun der $\cos^{2}/_{n} R$ größer sein muß als $\cos^{2}/_{\nu} R$, wenn $n > \nu$, so ist $n . \sin^{2}/_{n} R : \nu . \sin^{2}/_{\nu} R < b f d : \beta \varphi \delta$, oder $n . b i : \nu \beta \iota < b f d : \beta \varphi \delta$, d. i. $b f + f d + d b : \beta \varphi + \varphi \delta + \delta \beta < b f d : \beta \varphi \delta$.

Ferner ist nach der 424. Formel $\triangle a c e = \frac{(b f + f d + d b)^2}{2 n . \sin^{4}/_{n} R}$, also auch ein anderes reguläres Polygon von verschiedener Seitenanzahl $\alpha \gamma \varepsilon = \frac{(\beta \varphi + \varphi \delta + \delta \beta)^2}{2 \nu . \sin^{4}/_{\nu} R}$. Ist nun $n > \nu$, so ist $a c e < \alpha \gamma \varepsilon$, daher auch $\frac{(b f + f d + d b)^2}{2 n . \sin^{4}/_{n} R} < \frac{(\beta \varphi + \varphi \delta + \delta \beta)^2}{2 \nu . \sin^{4}/_{\nu} R}$, oder $\frac{(b f + f d + d b)^2}{(\beta \varphi + \varphi \delta + \delta \beta)^2} < \frac{n . \sin^{4}/_{n} R}{\nu . \sin^{4}/_{\nu} R}$.

Nun ist aber nach Obigem $n . \sin^{2}/_{n} R \times \cos^{2}/_{n} R : \nu . \sin^{2}/_{\nu} R . \cos^{2}/_{\nu} R = b f d : \beta \varphi \delta$, mithin auch $n . 2 . \sin^{2}/_{n} R . \cos^{2}/_{n} R : \nu . 2 \sin^{2}/_{\nu} R . \cos^{2}/_{\nu} R = b f d : \beta \varphi \delta$, das ist $n . \sin^{4}/_{n} R : \nu . \sin^{4}/_{\nu} R = b f d : \beta \varphi \delta$. Daher auch $\frac{(b f + f d + d b)^2}{(\beta \varphi + \varphi \delta + \delta \beta)^2} < \frac{b f d}{\beta \varphi \delta}$, folglich $\frac{b f + f d + d b}{\beta \varphi + \varphi \delta + \delta \beta} < \frac{\sqrt{b f d}}{\sqrt{\beta \varphi \delta}}$.

Zusatz. Die Inhalte zweier regelmäßigen Polygone in ein und demselben Kreise verhalten sich zu einander, wie die Produkte aus ihrer Seitenanzahl in den Sinus des Mittelpunktswinkels.

V. Die Umfänge zweier regulären Polygone in demselben Kreise aber von

Hosted by Google

verschiedener Seitenanzahl verhalten sich zu einander, wie die Wurzeln aus den Produkten der Inhalte dieser eingeschriebenen Vielecke in die der umgeschriebenen.

$$bf + fd + db : \beta\varphi + \varphi\delta + \delta\beta = \sqrt{bfd \,.\, ace} : \sqrt{\beta\varphi\delta \,.\, \alpha\gamma\varepsilon}.$$

Beweis. Da nach der 424. Formel $ace = \frac{(bf + fd + db)^2}{2n \,.\, \sin {}^4/_n R}$, so ist auch $ace : \alpha\gamma\varepsilon = \frac{(bf + fd + db)^2}{n \,.\, \sin {}^4/_n R} : \frac{(\beta\varphi + \varphi\delta + \delta\beta)^2}{\nu \,.\, \sin {}^4/_\nu R} = \frac{(bf + fd + db)^2}{bfd} : \frac{(\beta\varphi + \varphi\delta + \delta\beta)^2}{\beta\varphi\delta}$, daher $ace \,.\, bfd : \alpha\gamma\varepsilon \,.\, \beta\varphi\delta = (bf + fd + db)^2 : (\beta\varphi + \varphi\delta + \delta\beta)^2$, mithin auch $bf + fd + db : \beta\varphi + \varphi\delta + \delta\beta = \sqrt{ace \,.\, bfd} : \sqrt{\alpha\gamma\varepsilon \,.\, \beta\varphi\delta}$.

VI. Die Inhalte zweier Polygondreiecke in demselben Kreise von verschiedener Seitenanzahl verhalten sich zu einander, wie die Sinus ihrer Mittelpunktswinkel.

$$bof : \beta\omega\varphi = \sin {}^4/_n R : \sin {}^4/_\nu R.$$

Beweis. Es war nach IV und dem Zusatz $bfd : \beta\varphi\delta = n \,.\, \sin {}^4/_n R : \nu \,.\, \sin {}^4/_\nu R$, also auch $n \,.\, bof : \nu \,.\, \beta\omega\varphi = n \,.\, \sin {}^4/_n R : \nu \,.\, \sin {}^4/_\nu R$, mithin auch $bof : \beta\omega\varphi = \sin {}^4/_n R : \sin {}^4/_\nu R$.

Oder auch es ist $bof = bi \,.\, io$ und $\beta\omega\varphi = \beta\iota \,.\, \iota\omega$, aber nach Formeln 68 und 70 ist $bi \,.\, io = bo \,.\, \sin {}^2/_n R \,.\, bo \,.\, \cos {}^2/_n R$, also auch $\beta\iota \,.\, \iota o = \beta\omega \,.\, \sin {}^2/_n R \,.\, \beta\omega \,.\, \cos {}^2/_\nu R$, und da $bo = \beta\omega$, so ist $bof : \beta\omega\varphi = \sin {}^2/_n R \,.\, \cos {}^2/_n R : \sin {}^2/_\nu R \,.\, \cos {}^2/_\nu R$, oder $bof : \beta\omega\varphi = 2 \sin {}^2/_n R \,.\, \cos {}^2/_n R : 2 \sin {}^2/_\nu R \,.\, \cos {}^2/_\nu R = \sin {}^4/_n R : \sin {}^4/_\nu R$.

Ist $n = 4$, und $\nu = 3$, so ist $\sin {}^4/_n R > \sin {}^4/_\nu R$, denn dann ist $\sin {}^4/_n R = \sin 90^0$, und $\sin {}^4/_\nu R = \sin {}^4/_3 R = \sin . 120^0$, und es ist $\sin 90^0 > \sin 120^0$. Dann sind also die Polygone in demselben Kreise das reguläre Dreieck und reguläre Viereck. In allen übrigen Fällen muß immer, wenn $n > \nu$, auch $\sin {}^4/_n R < \sin {}^4/_\nu R$ sein, also $\sin {}^4/_5 R < \sin {}^4/_4 R$ beim Fünfeck und Viereck, $\sin {}^4/_6 R < \sin {}^4/_5 R$ beim Sechseck und Fünfeck. Daher hat auch mit Ausnahme des regulären Vierecks als Mehrecks und des Dreiecks als Wenigerecks sonst immer das Polygon in demselben Kreise das größte Polygondreieck, welches die wenigsten Seiten enthält, während der Inhalt des ganzen Wenigerecks kleiner bleibt als der des Mehrecks Dieses gilt aber nur bei Polygonen, deren Seitenanzahl nur um eins verschieden ist; denn sonst hat noch das Fünfeck ein größeres Polygondreieck als das Dreieck und das Sechseck ein gleiches mit dem Dreieck, $\sin {}^4/_5 R > \sin {}^4/_3 R$, weil auch $\sin {}^4/_5 R > \sin {}^2/_3 R$, und $\sin {}^4/_3 R = \sin {}^2/_3 R$ ist, ebenso ist $\sin {}^4/_6 R = \sin {}^4/_3 R = \sin {}^2/_3 R$.

Hosted by Google

VII. Das Verhältniß der Sinus der halben Bogen in demselben Kreise ist kleiner als das der ganzen Bogen zu einander.

$$\sin {}^2/_n\,R : \sin {}^2/_\nu\,R < \sin {}^4/_n\,R : \sin {}^4/_\nu\,R.$$

Beweis. Es ist $\sin {}^2/_n\,R.\cos^2/_n\,R : \sin^2/_\nu\,R \,.\cos {}^2/_\nu R = \sin {}^4/_n\,R : \sin {}^4/_\nu\,R$ $= \text{b o f} : \beta\,\omega\,\varphi$. Also $\sin {}^2/_n\,R : \sin {}^2/_\nu R = \dfrac{\sin \,.\, 4n\,R}{\sin {}^4/_\nu\,R} \times \dfrac{\cos {}^2/_\nu\,R.}{\cos {}^2/_n\,R}$.

Daher weil $\cos {}^2/_\nu\,R < \cos {}^2/_n\,R$, wenn $n > \nu$, und $\dfrac{\cos {}^2/_\nu\,R}{\cos {}^2/_n\,R}$ ein ächter Bruch ist, so ist $\sin {}^2/_n\,R : \sin {}^2/_\nu\,R < \sin {}^4/_n\,R : \sin {}^4/_\nu\,R$.

VIII. Unter allen bekannten trigonometrischen Linien ist fast immer das Verhältniß der Tangenten zu einander bei demselben Kreise kleiner nicht nur als das jeder andern Linie, sondern auch als das umgekehrte derselben. Aber die Cotangenten haben ein größeres Verhältniß zu einander sowohl als alle übrigen als auch umgekehrt als dieselben.

Beweis. Es ist $\tan {}^2/_n\,R : \tan {}^2/_\nu\,R = \dfrac{\sin {}^2/_n\,R}{\cos^2/_n\,R} : \dfrac{\sin {}^2/_n\,R}{\cos^2/_\nu\,R}$. Bei demselben Kreise $\tan {}^2/_n\,R : \tan {}^2/_\nu\,R = \dfrac{\sin {}^2/_n\,R}{\sin {}^2/_\nu\,R} \times \dfrac{\cos {}^2/_\nu\,R}{\cos {}^2/_n\,R}$, daher auch $\tan^2/_n R : \tan^2/_\nu R < \sin {}^2/_n R : \sin^2/_\nu R$, weil $\cos^2/_\nu R < \cos^2/_n R$ ist, mithin da auch $\sin {}^2/_n\,R < \sin {}^2/_\nu\,R$, hat man auch $\tan {}^2/_n\,R : \tan {}^2/_\nu\,R < \sin {}^2/_\nu\,R : \sin {}^2/_n\,R$, und $\tan {}^2/_n\,R : \tan {}^2/_\nu\,R < \cos {}^2/_\nu\,R : \cos {}^2/_n\,R$, also auch $\tan {}^2/_n\,R : \tan {}^2/_\nu\,R$ $< \cos {}^2/_n\,R : \cos {}^2/_\nu\,R$. Nun ist auch $\tan {}^2/_n\,R : \tan {}^2/_\nu\,R = \dfrac{\cos {}^2/_\nu\,R}{\sin {}^2/_\nu\,R} : \dfrac{\cos {}^2/_n\,R}{\sin {}^2/_n\,R}$ $= \cot {}^2/_\nu\,R : \cot {}^2/_n\,R$. Da $\tan {}^2/_n\,R < \tan {}^2/_\nu\,R$, wenn $n > \nu$, so ist auch $\cot {}^2/_\nu\,R < \cot {}^2/_n\,R$, also ist $\cot {}^2/_\nu\,R : \cot {}^2/_n\,R$ ein ächter Bruch und daher kleiner als $\cot {}^2/_n\,R : \cot {}^2/_\nu\,R$, mithin auch $\tan {}^2/_n\,R : \tan {}^2/_\nu\,R <$ $\cot {}^2/_n\,R : \cot {}^2/_\nu\,R$. Ferner ist auch $\tan {}^2/_n\,R : \tan {}^2/_\nu\,R = \dfrac{\sin {}^2/_n\,R}{\cos {}^2/_n\,R} : \dfrac{\sin {}^2/_\nu\,R}{\cos {}^2/_\nu\,R} =$ $\sec^2/_n R \,.\, \sin {}^2/_n\,R : \sec {}^2/_\nu\,R \,.\, \sin {}^2/_\nu\,R$, also $\tan {}^2/_n\,R : \tan {}^2/_\nu\,R <$ $\sec {}^2/_n\,R : \sec {}^2/_\nu\,R$, und da $\sec {}^2/_n\,R < \sec {}^2/_\nu\,R$, so ist auch $\tan {}^2/_n\,R : \tan {}^2/_\nu\,R$ $< \sec {}^2/_\nu\,R : \sec {}^2/_n\,R$, und weil $\tan {}^2/_n\,R : \tan {}^2/_\nu\,R < \sin {}^2/_n\,R : \sin {}^2/_\nu\,R$, so auch $\tan {}^2/_n\,R : \tan {}^2/_\nu\,R < \operatorname{cosec} {}^2/_\nu\,R : \operatorname{cosec} {}^2/_n\,R$, und da $\tan {}^2/_n\,R : \tan {}^2/_\nu\,R$ $< \sin {}^2/_\nu\,R : \sin {}^2/_n\,R$, so ist $\tan {}^2/_n\,R : \tan {}^2/_\nu\,R < \operatorname{cosec} {}^2/_n\,R : \operatorname{cosec} {}^2/_\nu\,R$.

Zweitens ist das Verhältniß der Cotangenten gleich dem umgekehrten der Tangenten das größeste.

Weil nemlich $\tan {}^2/_n\,R : \tan {}^2/_\nu\,R < \sin {}^2/_n\,R : \sin {}^2/_\nu\,R$, so ist $\sin {}^2/_\nu\,R : \sin {}^2/_n\,R < \tan {}^2/_\nu\,R : \tan {}^2/_n\,R$, also da $\tan {}^2/_\nu\,R : \tan {}^2/_n\,R =$ $\cot {}^2/_n\,R : \cot {}^2/_\nu\,R$, so ist $\cot {}^2/_n\,R : \cot {}^2/_\nu\,R > \sin {}^2/_\nu\,R : \sin {}^2/_n\,R$, mithin auch $\cot {}^2/_n\,R : \cot {}^2/_\nu\,R > \sin {}^2/_n\,R : \sin {}^2/_\nu\,R$.

Hosted by Google

Weil $\tan {}^2/_n\,R : \tan {}^2/_\nu\,R < \cos {}^2/_\nu\,R : \cos {}^2/_n\,R$, ſo $\cos {}^2/_n\,R : \cos {}^2/_\nu\,R < \tan {}^2/_\nu\,R : \tan {}^2/_n\,R$, alſo $\cot {}^2/_n\,R : \cot {}^2/_\nu\,R > \cos {}^2/_n\,R : \cos {}^2/_\nu\,R$, und $\cot {}^2/_n\,R : \cot {}^2/_\nu\,R > \cos {}^2/_\nu\,R : \cos {}^2/_n\,R$.

Weil $\cot {}^2/_n\,R : \cot {}^2/_\nu\,R = \tan {}^2/_\nu\,R : \tan {}^2/_n\,R$, ſo iſt
$\cot {}^2/_n\,R : \cot {}^2/_\nu\,R > \tan {}^2/_n\,R : \tan {}^2/_\nu\,R$, und weil
$\tan {}^2/_n\,R : \tan {}^2/_\nu\,R < \sec {}^2/_n\,R : \sec {}^2/_\nu\,R$, ſo iſt
$\sec {}^2/_\nu\,R : \sec {}^2/_n\,R < \tan {}^2/_\nu\,R : \tan {}^2/_n\,R$. oder
$\cot {}^2/_n\,R : \cot {}^2/_\nu\,R > \sec {}^2/_\nu\,R : \sec {}^2/_n\,R$, daher nun auch
$\cot {}^2/_n\,R : \cot {}^2/_\nu\,R > \sec {}^2/_n\,R : \sec {}^2/_\nu\,R$, und weil
$\tan {}^2/_n\,R : \tan {}^2/_\nu\,R < \operatorname{cosec} {}^2/_n\,R : \operatorname{cosec} {}^2/_\nu\,R$, ſo auch
$\operatorname{cosec} {}^2/_\nu\,R : \operatorname{cosec} {}^2/_n\,R < \tan {}^2/_\nu\,R : \tan {}^2/_n\,R$, oder
$\cot {}^2/_n\,R : \cot {}^2/_\nu\,R > \operatorname{cosec} {}^2/_\nu\,R : \operatorname{cosec} {}^2/_n\,R$, alſo auch
$\cot {}^2/_n\,R : \cot {}^2/_\nu\,R > \operatorname{cosec} {}^2/_n\,R : \operatorname{cosec} {}^2/_\nu\,R$.

Weil endlich $\tan {}^2/_n\,R : \tan {}^2/_\nu\,R < \operatorname{cosec} {}^2/_\nu\,R : \operatorname{cosec} {}^2/_n\,R$, ſo iſt $\operatorname{cosec} {}^2/_n\,R : \operatorname{cosec} {}^2/_\nu\,R < \tan {}^2/_\nu\,R : \tan {}^2/_n\,R$, alſo $\cot {}^2/_n\,R : \cot {}^2/_\nu\,R > \operatorname{cosec} {}^2/_n\,R : \operatorname{cosec} {}^2/_\nu\,R$.

Eine Ausnahme jedoch machen die in der Rechnung nicht gebrauchten sinus versus und cosinus versus. Es iſt nemlich nach der 242. Formel $\mathrm{a\,b} = \frac{\mathrm{h\,i}\,(1 + \cos {}^2/_n\,R)}{\sin {}^2/_n\,R \,.\, \cos {}^2/_n\,R}$, alſo hat man $\mathrm{a\,b} : \alpha\beta = \mathrm{h\,i}\left(\frac{1}{\sin {}^2/_n\,R \,.\, \cos {}^2/_n\,R} + \frac{1}{\sin {}^2/_n R}\right) : \vartheta\,\iota\left(\frac{1}{\sin {}^2/_\nu\,R \,.\, \cos {}^2/_\nu\,R} + \sin \frac{1}{{}^2/_\nu\,R}\right)$.

Da nun der $\sin {}^2/_n\,R < \sin {}^2/_\nu\,R$, und nach Satz VI das Polygondreieck des Wenigerecks mit Ausnahme beim Dreieck zum Viereck, beim Dreieck zum Fünfeck, beim Dreieck zum Sechseck ſonſt größer iſt als das Polygondreieck des Mehrecks, alſo $\sin {}^2/_\nu\,R \,.\, \cos {}^2/_\nu\,R > \sin {}^2/_n\,R \,\cos {}^2/_n\,R$, ſo iſt auch dann:

$$\frac{1}{\sin {}^2/_n\,R \,.\, \cos {}^2/_n\,R} + \frac{1}{\sin {}^2/_n\,R} > \frac{1}{\sin {}^2/_\nu\,R \,.\, \cos {}^2/_\nu\,R} + \frac{1}{\sin {}^2/_\nu\,R},$$

mithin auch $\mathrm{a\,b} : \alpha\beta = \mathrm{h\,f} \times$ mit einem unächten Bruch: $\vartheta\,\iota$, alſo $\mathrm{a\,b} : \alpha\beta > \mathrm{h\,i} : \vartheta\,\iota$, $\tan {}^2/_n\,R : \tan {}^2/_\nu\,R > \operatorname{sin\,vers} {}^2/_n\,R : \operatorname{sin\,vers} {}^2/_\nu\,R$. Folglich haben in allen jenen andern Fällen wenigſtens die Sinus verſus zu einander ein kleineres Verhältniß als die Tangenten, oder es iſt $\operatorname{sin\,vers} {}^2/_5\,R : \operatorname{sin\,vers} {}^2/_4\,R < \tan {}^2/_5\,R : \tan {}^2/_4\,R$; $\operatorname{sin\,vers} 36^0 : \operatorname{sin\,vers} 45^0 < \tan 36^0 : \tan 45^0$; $\operatorname{sin\,vers} 30^0 : \operatorname{sin\,vers} 36^0 < \tan 30^0 : \tan 36^0$. Beim Sechseck und Dreieck iſt $\sin {}^2/_n\,R \,.\, \cos {}^2/_n\,R = \sin {}^2/_\nu\,R \,.\, \cos {}^2/_\nu\,R$, alſo da $\frac{1}{\sin {}^2/_n\,R} > \frac{1}{\sin {}^2/_\nu\,R}$ auch hier $\mathrm{a\,b} : \alpha\beta = \mathrm{h\,i} \times$ mit einem unächten Bruch: $\vartheta\,\iota$. —

Da nun $\operatorname{sin\,vers} {}^2/_n\,R : \operatorname{sin\,vers} {}^2/_\nu\,R < \tan {}^2/_n\,R : \tan {}^2/_\nu\,R$, ſo iſt

Hosted by Google

sin vers $^2/_\nu$ R : sin vers $^2/_n$ R > tan $^2/_n$ R : tan $^2/_\nu$ R, weil das erste ein unächter Bruch, das zweite ein ächter ist. Also hat man auch

tan $^2/_n$ R : tan $^2/_\nu$ R > sin vers $^2/_n$ R : sin vers $^2/_\nu$ R und
tan $^2/_n$ R : tan $^2/_\nu$ R < sin vers $^2/_\nu$ R : sin vers $^2/_n$ R, und
cot $^2/_n$ R : cot $^2/_\nu$ R > sin vers $^2/_n$ R : sin vers $^2/_\nu$ R, aber
cot $^2/_n$ R : cot $^2/_\nu$ R < sin vers $^2/_\nu$ R : sin vers $^2/_n$ R. Nun ist auch
cot (R − $^2/_n$ R) : cot (R − $^2/_\nu$ R) > cos vers (R − $^2/_n$ R) : cos vers (R − $^2/_\nu$ R),
cot (R − $^2/_n$ R) : cot (R − $^2/_\nu$ R) < cos vers (R − $^2/_\nu$ R) : cos vers (R − $^2/_n$ R),
tan (R − $^2/_n$ R) : tan (R − $^2/_\nu$ R) > cos vers (R − $^2/_n$ R) : cos vers (R − $^2/_\nu$ R)
tan (R − $^2/_n$ R) : tan (R − $^2/_\nu$ R) < cos vers (R − $^2/_\nu$ R) : cos vers (R − $^2/_n$ R).

Außer diesen trigonometrischen Linien bieten unsere Formeln noch andere dar, wie die an der Figur bezeichneten a i und a h, welche man hier in Betracht ziehen kann; dazu kann man auch noch die Linie i d nehmen, welche aus dem trigonometrischen Cosinus und dem Halbmesser besteht, aus i o in den Formeln + r. Es wird sich zeigen, daß die Linien a i und a h in ihrem Größenverhältniß zu den Tangenten dem Sinus versus, dagegen die Linie i d der allgemeinen Regel nachfolgt. Der leichten Uebersicht wegen will ich einmal den Linien a i, a h und i d einen Namen geben, i d den sin. subversus, a i den sin. adversus und a h die Affecante nennen, ebenso die Linien der Complemente, der Ergänzungen zu einem Quadranten, cos. subversus, cos. adversus und coassecante.

Zuerst also bei der Linie i d = sin subv. $^2/_n$ R = 1 + cos $^2/_n$ R hat man wenn n > ν, auch sin subv. $^2/_n$ R > sin subv. $^2/_\nu$ R, weil cos $^2/_n$ R > cos $^2/_\nu$ R, daher tan $^2/_n$ R : tan $^2/_\nu$ R < sin subv. $^2/_n$ R : sin subv. $^2/_\nu$ R.

Nun ist auch tan $^2/_n$ R : tan $^2/_\nu$ R < sin subv. $^2/_\nu$ R : sin subv. $^2/_n$ R, weil tan $^2/_n$ R : tan $^2/_\nu$ R < cos $^2/_\nu$ R : cos $^2/_n$ R ist. Wenn nemlich von einem Bruche $\frac{a}{b}\left(\frac{\cos {}^2/_\nu R}{\cos {}^2/_n R}\right)$ der Zähler a kleiner als der Nenner b ist, so ist auch a . c < b . c, wo c eine ganze Zahl bedeutet, und a b + a c < a b + b c; a (b + c) < b (a + c); $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c}\left(\frac{\cos {}^2/_\nu R}{\cos {}^2/_n R} < \frac{1+\cos {}^2/_\nu R}{1+\cos {}^2/_n R}\right)$.

Weil nun sin subv. $^2/_n$ R : sin subv. $^2/_\nu$ R > tan $^2/_n$ R : tan $^2/_\nu$ R, so ist cot $^2/_n$ R : cot $^2/_\nu$ R > sin subv. $^2/_\nu$ R : sin subv. $^2/_n$ R, und cot $^2/_n$ R : cot $^2/_\nu$ R > sin subv. $^2/_n$ R : sin subv. $^2/_\nu$ R.

Ferner ist $\frac{\cos \text{subv } {}^2/_n R}{\cos \text{subv. } {}^2/_\nu R} = \frac{1+\sin {}^2/_n R}{1+\sin {}^2/_\nu R}$. Also nach obiger Regel, daß wenn a < b, sin $^2/_n$ R < sin $^2/_\nu$ R, auch $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c}$, $\frac{\cos \text{subv. } {}^2/_n R}{\cos \text{subv. } {}^2/_\nu R} > \frac{\sin {}^2/_n R}{\sin {}^2/_\nu R}$. Es ist aber tan $^2/_n$ R : tan $^2/_\nu$ R < sin $^2/_n$ R : sin $^2/_\nu$ R, also auch

Hosted by Google

$\tan {}^2/_n R : \tan {}^2/_\nu R < \cos subv. {}^2/_n R : \cos subv. {}^2/_\nu R$. Da nun $\cos subv. {}^2/_n R < \cos subv. {}^2/_\nu R$ ſein muß, ſo iſt:

$\tan {}^2/_n R : \tan {}^2/_\nu R < \cos subv. {}^2/_\nu R : \cos subv. {}^2/_n R$. Daher auch

$\cos subv. {}^2/_\nu R : \cos subv. {}^2/_n R < \tan {}^2/_\nu R : \tan {}^2/_n R$, und mithin

$\cot {}^2/_n R : \cot {}^2/_\nu R > \cos subv. {}^2/_\nu R : \cos subv. {}^2/_n R$, und es iſt auch

$\cos subv. {}^2/_n R : \cos subv. {}^2/_\nu R < \tan {}^2/_\nu R : \tan {}^2/_n R$, alſo

$\cot {}^2/_n R : \cot {}^2/_\nu R > \cos subv. {}^2/_n R : \cos subv. {}^2/_\nu R$.

Für die von uns sin. adversus genannte Linie a i hat man nach der 237. Formel $a\,i = h\,i \frac{(1 + \cos {}^2/_n R)}{\cos {}^2/_n R}$ daher iſt auch $a\,i : \alpha\,\iota = h\,i \frac{(1+\cos {}^2/_n R)}{\cos {}^2/_n R} : \vartheta\,\iota \frac{(1 + \cos {}^2/_\nu R}{\cos {}^2/_\nu R)}$. Da nun nach der 242. Formel $a\,b : \alpha\beta = hi \frac{(1 + \cos {}^2/_n R)}{\sin {}^2/_n R \,.\, \cos {}^2/_n R} : \vartheta\,\iota \frac{(1 + \cos {}^2/_\nu R)}{\sin {}^2/_\nu R \,.\, \cos {}^2/_\nu R}$, ſo muß das Verhältniß $a\,b : \alpha\beta > a\,i : \alpha\,\iota$ ſein, oder $\tan {}^2/_n R : \tan {}^2/_\nu R > \sin adv. {}^2/_n R : \sin adv. {}^2/_\nu R$. Nun iſt $\sin adv. {}^2/_n R < \sin adv. {}^2/_\nu R$, denn nach Formel 303 iſt $a\,i = \frac{a\,c \,.\, \sin {}^2/_n R}{2}$ oder nach 737 iſt $a\,i = a\,b \,.\, \sin {}^2/_n R$, und daher $\alpha\,\iota = \alpha\,\beta \,.\, \sin {}^2/_\nu R$, mithin da $a\,b \,.\, \sin {}^2/_n R < \alpha\,\beta \,.\, \sin {}^2/_\nu R$, auch $a\,i < \alpha\,\iota$, und $a\,i : \alpha\,\iota < a\,b : \alpha\,\beta$, aber $\tan {}^2/_n R : \tan {}^2/_\nu R < \sin adv. {}^2/_\nu R : \sin adv. {}^2/_n R$, weil $\alpha\,\iota > a\,i$, $\frac{\alpha\,\iota}{a\,i} > 1$.

Da $\tan {}^2/_n R : \tan {}^2/_\nu R > \sin adv. {}^2/_n R : \sin adv. {}^2/_\nu R$, ſo iſt

$\cot {}^2/_\nu R : \cot {}^2/_n R > \sin adv. {}^2/_n R : \sin adv. {}^2/_\nu R$, oder

$\cot {}^2/_n R : \cot {}^2/_\nu R < \sin adv. {}^2/_\nu R : \sin adv. {}^2/_n R$, und da

$\tan {}^2/_n R : \tan {}^2/_\nu R < \sin adv. {}^2/_\nu R : \sin adv. {}^2/_n R$, ſo iſt

$\cot {}^2/_n R : \cot {}^2/_\nu R > \sin adv. {}^2/_n R : \sin adv. {}^2/_\nu R$. Daher

$\tan (R - {}^2/_n R) : \tan (R - {}^2/_\nu R) > \cos adv. (R - {}^2/_n R) : \cos adv. (R - {}^2/_\nu R)$

$\tan (R - {}^2/_n R) : \tan (R - {}^2/_\nu R) < \cos adv. (R - {}^2/_\nu R) : \cos adv. (R - {}^2/_n R)$

$\cot (R - {}^2/_n R) : \cot (R - {}^2/_\nu R) > \cos adv. (R - {}^2/_n R) : \cos adv. (R - {}^2/_\nu R)$

$\cot (R - {}^2/_n R) : \cot (R - {}^2/_\nu R) < \cos adv. (R - {}^2/_\nu R) : \cos adv. (R - {}^2/_n R)$.

Da nun $R - {}^2/_n R > R - {}^2/_\nu R$, ſo nenne man $R - {}^2/_\nu R = {}^2/_N R$, und $R - {}^2/_n R = {}^2/_N R$, ſo daß ${}^2/_N R < {}^2/_N R$ wird. Mithin wird

$\tan {}^2/_N R : \tan {}^2/_N R < \cos adv. {}^2/_N R : \cos adv. {}^2/_N R$,

$\tan {}^2/_N R : \tan {}^2/_N R > \cos adv. {}^2/_N R : \cos adv. {}^2/_N R$,

$\cot {}^2/_N R : \cot {}^2/_N R < \cos adv. {}^2/_N R : \cos adv. {}^2/_N R$,

$\cot {}^2/_N R : \cot {}^2/_N R > \cos adv. {}^2/_N R : \cos adv. {}^2/_N R$.

Für die Linie a h, welche wir die Aſſecante genannt haben, iſt nach der 73. Formel $a\,h = \frac{b\,o\,(1 - \cos {}^2/_n R)}{\cos {}^2/_n R}$, und nach der 209. Formel iſt

Hosted by Google

$a\,b = a\,h\,\frac{(1+\cos {}^2/_n\,R)}{\sin {}^2/_n\,R}$. Daher auch $a\,b : \alpha\,\beta = a\,h\,\frac{(1+\cos {}^2/_n\,R)}{\sin {}^2/_n\,R} : \alpha\,\vartheta\,\frac{(1+\cos {}^2/_\nu\,R)}{\sin {}^2/_\nu\,R}$. Weil nun $\cos {}^2/_n\,R > \cos {}^2/_\nu\,R$, und $\sin {}^2/_n\,R < \sin {}^2/_\nu\,R$, so ist $\frac{1+\cos {}^2/_n\,R}{\sin {}^2/_n\,R} > \frac{1+\cos {}^2/_\nu\,R}{\sin {}^2/_\nu\,R}$, also auch $a\,b : \alpha\,\beta > a\,h : \alpha\,\vartheta$, oder $\tan {}^2/_n\,R : \tan {}^2/_\nu\,R > \text{assec. } {}^2/_n\,R : \text{assec. } {}^2/_\nu\,R$.

Da nun assec. ${}^2/_n\,R <$ assec. ${}^2/_\nu\,R$ sein muß, wenn $n > \nu$, denn nach der 238. Formel ist $a\,h = \frac{h\,i}{\cos {}^2/_n\,R}$, also $\alpha\,\vartheta = \frac{\vartheta\,\iota}{\cos {}^2/_\nu\,R}$, und $h\,i < \vartheta\,\iota$, $\cos {}^2/_n R > \cos {}^2/_\nu R$, daher $ah < \alpha\vartheta$, so ist $\tan {}^2/_n R : \tan {}^2/_\nu R <$ assec. ${}^2/_\nu R$: assec. ${}^2/_n R$. Folglich ist auch $\cot {}^2/_n\,R : \cot {}^2/_\nu\,R <$ assec. ${}^2/_\nu\,R$: assec. ${}^2/_n\,R$, und $\cot {}^2/_n\,R : \cot {}^2/_\nu\,R >$ assec. ${}^2/_n\,R$: assec ${}^2/_\nu\,R$. Daher auch

$\tan (R - {}^2/_n R) : \tan (R - {}^2/_\nu R) <$ coassec. $(R - {}^2/_\nu\,R)$: coassec. $(R - {}^2/_n\,R)$
$\tan (R - {}^2/_n R) : \tan (R - {}^2/_\nu R) >$ coassec. $(R - {}^2/_n\,R)$: coassec. $(R - {}^2/_\nu\,R)$
$\cot (R - {}^2/_n R) : \cot (R - {}^2/_\nu R) >$ coassec. $(R - {}^2/_n\,R)$: coassec. $(R - {}^2/_\nu\,R)$
$\cot (R - {}^2/_n R) : \cot (R - {}^2/_\nu R) <$ coassec. $(R - {}^2/_\nu\,R)$: coassec. $(R - {}^2/_n\,R)$.

Also $\tan {}^2/_N R : \tan {}^2/_N R >$ coassec. ${}^2/_N R$: coassec. ${}^2/_N R$,
$\tan {}^2/_N R : \tan {}^2/_N R <$ coassec. ${}^2/_N R$: coassec. ${}^2/_N R$,
$\cot {}^2/_N R : \cot {}^2/_N R <$ coassec. ${}^2/_N R$: coassec. ${}^2/_N R$,
$\cot {}^2/_N R : \cot {}^2/_N R >$ coassec. ${}^2/_N R$: coassec. ${}^2/_N R$.

IX. Auch haben die Tangenten verschiedener Bogen desselben Kreises zu einander ein kleineres Verhältniß als umgekehrt die Anzahl der Seiten der Polygone, und die Cotangenten ein größeres als die Seitenanzahlen.

$$\tan {}^2/_n\,R : \tan {}^2/_\nu\,R < \nu : n;\quad \cot {}^2/_n\,R : \cot {}^2/_\nu\,R > n : \nu.$$

Beweis. Es ist $n\,.\,a\,b < \nu\,.\,\alpha\,\beta$, wenn $n > \nu$ und $r = \varrho$ ist nach Lehrsatz III, daher $n\,.\tan {}^2/_n\,R < \nu\,.\tan {}^2/_\nu\,R$, $\tan {}^2/_n\,R : \tan {}^2/_\nu\,R < \nu : n$.

Also muß auch $\tan {}^2/_n : \tan {}^2/_\nu\,R < n : \nu$, und es ist auch $n : \nu <$ $\tan {}^2/_\nu\,R : \tan {}^2/_n\,R$, oder $\cot {}^2/_n\,R : \cot {}^2/_\nu\,R > n : \nu$, daher um so viel mehr $\cot {}^2/_n\,R : \cot {}^2/_\nu\,R > \nu : n$.

X. Wenn um zwei Polygone (s. Fig. 9, a und b), die regulär sind, gleichen Umfang haben, aber eine verschiedene Seitenanzahl, Kreise gelegt werden, und um diese Kreise wieder regelmäßige Polygone von übereinstimmenden Seitenanzahlen mit den eingeschriebenen errichtet werden, so verhalten sich erstens die Produkte aus den Inhalten der Mehrecke in die der Wenigerecke wie die Quadrate der Halbmesser,

Fig. 9, a.

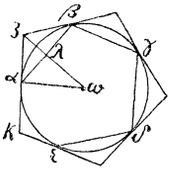
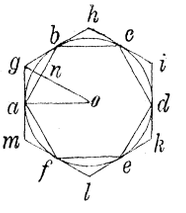


Fig. 9, b.



zweitens verhält sich das umgeschriebene Mehreck zu dem umbeschriebenen Wenigereck wie die Bogensecanten der halben Mittelpunktswinkel von diesen Kreisen zu einander.

$abcdef \times ghiklm : \alpha\beta\gamma\delta\varepsilon \times \zeta\varkappa\lambda\mu = bfd \times ace : \beta\varphi\delta \times \alpha\gamma\varepsilon = r^2 : \varrho^2$, und

$$ace : \alpha\gamma\varepsilon = r \,.\, \sec.{}^{2}/_{n}\,R : \varrho \,.\, \sec.{}^{2}/_{\nu}\,R.$$

Beweis. Gemäß der 917. Formel ist $\triangle bfd = \triangle ace \,.\, \cos^{2}/_{n}\,R^2$. Also hat man auch $bfd : \beta\varphi\delta = ace \,.\, \cos^{2}/_{n}\,R^2 : \alpha\gamma\varepsilon \,.\, \cos^{2}/_{\nu}\,R^2$.

Bei gleichem Umfange der Polygone bfd und $\beta\varphi\delta$ ist auch $r : \varrho = ace \,.\, \cos^{2}/_{n}\,R : \alpha\gamma\varepsilon \,.\, \cos^{2}/_{\nu}\,R$, daher $ace : \alpha\gamma\varepsilon = \dfrac{r}{\cos^{2}/_{n}\,R} \cdot \dfrac{\varrho}{\cos^{2}/_{\nu}\,R}$, und

$ace^2 : \alpha\gamma\varepsilon^2 = \dfrac{r^2}{\cos^{2}/_{n}\,R^2} : \dfrac{\varrho^2}{\cos^{2}/_{\nu}\,R^2}$. Daher ist zuerst:

$bfd \,.\, ace : \beta\varphi\delta : \alpha\gamma\varepsilon = r^2 : \varrho^2$, und zweitens

$ace : \alpha\gamma\varepsilon = r \,.\, \sec^{2}/_{n}\,R : \varrho \,.\, \sec^{2}/_{\nu}\,R$.

Folgende Sätze finden sich zwar schon in der Geometrie, lassen sich aber doch auch trigonometrisch darstellen:

XI. a) Die Umfänge der gleichseiten-anzahligen regulären ein- und umgeschriebenen Polygone desselben Kreises verhalten sich zu einander 1) wie die Cosinus der halben Mittelpunktswinkel zu der Einheit (dem Halbmesser), 2) wie (der Halbmesser) die Einheit zur Secante.

$$bf + fd + db : ac + ce + ea = \cos^{2}/_{n}\,R : 1$$
$$bf + fd + db : ac + ce + ea = 1 : \sec^{2}/_{n}\,R$$

Beweis. Nach der Formel 410 ist $ac + ce + ea = \dfrac{(bf + fd + db)}{\cos^{2}/_{n}\,R}$, also $bf + fd + db : ac + ce + ea = \cos^{2}/_{n}\,R : 1$. Dieser Satz ist derselbe mit dem geometrischen, daß von zwei ähnlichen Polygonen die Umfänge sich zu einander verhalten, wie die kleinen Halbmesser. Denn es ist $\cos^{2}/_{n}\,R : 1 = r \,.\, \cos^{2}/_{n}\,R : r = bo \,.\, \cos^{2}/_{n}\,R : bo = io : bo$ nach Formel 70.

Zweitens da $bf + fd + db : ac + ce + ea = \cos^{2}/_{n}\,R : 1$, so ist auch $bf + fd + db : ac + ce + ea = 1 : \dfrac{1}{\cos^{2}/_{n}\,R} = 1 : \sec.{}^{2}/_{n}\,R$. Diesem Satze ist jener geometrische gleich, daß die Umfänge ähnlicher Polygone sich zu einander verhalten, wie die großen Halbmesser, weil $bo = 1$ der Halbmesser des Kreises auch der große Halbmesser des eingeschriebenen, und $\sec^{2}/_{n}\,R = ao$ der große Halbmesser des umgeschriebenen regulären gleichseitigen also auch ähnlichen Polygons ist.

XII b) Die Inhalte der gleichseiten-anzahligen regulären ein- und umge-

Hosted by Google

schriebenen Polygone desselben Kreises verhalten sich zu einander 1) wie die Quadrate des Cosinus des halben Mittelpunktswinkels und des Halbmessers (der Einheit), 2) wie die Quadrate der Umfänge.

Beweis. Die Formel 455 hatte $bfd = \frac{(ac+ce+ea)^2 . \cos^2 \overline{/_n R}^2 . \cot^2 /_n R}{4n}$

und die 457. Formel $ace = \frac{(ac+ce+ea)^2 . \cot^2 /_n R}{4n}$, also ist auch

$bfd : ace = \cos^2 \overline{/_n R}^2 : 1 = bo . \cos^2 \overline{/_n R}^2 : \overline{bo}^2$.

Da nun auch nach dem vorigen Lehrsatze $(bf+fd+db):(ac+ce+ea) = \cos^2 /_n R : 1$, so ist auch $bfd : ace = (bf+fd+db)^2 : (ac+ce+ea)^2$, und da $\cos^2 /_n R : 1 = 1 : \sec^2 /_n R$, auch $bfd : ace = 1 : \sec^2 \overline{/_n R}^2$.

Dieser Satz ist derselbe geometrische, daß die Inhalte ähnlicher Polygone sich zu einander verhalten, wie die Quadrate der großen oder der kleinen Halbmesser.

Dagegen gründen sich folgende Sätze auf bloßer trigonometrischer Berechnung.

XIII. Das Verhältniß der Umfänge der ein- und umgeschriebenen regulären gleichseiten-anzahligen Polygone desselben Kreises ist mit dem Verhältniß der Umfänge der innern und äußern Polygondreiecke, so wie mit dem der Umfänge dieser halben Dreiecke ein gleiches und ein und dasselbe.

$$bf+fd+db : ac+ce+ea = bo+of+fb : ac+co+oa = bi+io+ob : bo+oc+cb.$$

Beweis. Es war $bf+fd+db : ac+ce+ea = \cos^2 /_n R : 1$. Nun ist nach der 147. Formel $bo+of+fb = ao . 2 \cos^2 /_n R (1 + \sin^2 /_n R)$, und nach der 149. $ac+co+oa = ao . 2 (1 + \sin^2 /_n R)$. Also $bo+of+fb : ac+co+oa = \cos^2 /_n R : 1$. Auch ist nach der 82. Formel $bi+io+ob = bo (1 + \sin^2 /_n R + \cos^2 /_n R)$ und nach der 84.

$bo+oc+cb = \frac{bo (1 + \sin^2 /_n R + \cos^2 /_n R)}{\cos^2 /_n R}$, also auch

$bi+io+ob : bo+oc+cb = \cos^2 /_n R : 1$. Mithin

$$bf+fd+db : ac+ce+ea = bo+of+fb : ac+co+oa = bi+io+ob : bo+oc+cb.$$

XII. Der Inhalt des innern Polygondreiecks verhält sich zu dem äußern abgeschnittenen Dreieck aus den Tangenten und der Sehne, wie das Quadrat des Cosinus des halben Mittelpunktswinkels zu dem Quadrat des Sinus dieses Winkels; und der Inhalt des äußern Polygondreiecks verhält sich zu demselben äußern Dreieck, wie die Einheit (Quadrat des Halbmessers) zu dem Quadrat des Sinus des halben Mittelpunktswinkels.

Hosted by Google

$$\triangle bof : \triangle baf = \cos {}^2/_n R : \sin {}^2/_n R = 1 : \tan {}^2/_n R.$$
$$\triangle aco : \triangle baf = 1 : \sin {}^2/_n R.$$

Beweis. Die 124. Formel gibt $\triangle bof = io^2 . \tan {}^2/_n R$, und die 132. $\triangle baf = io^2 . \tan {}^2/_n R^3$, daher $\triangle bof : \triangle baf = 1 : \tan {}^2/_n R^2 = \cos {}^2/_n R^2 : \sin {}^2/_n R^2$.

Zweitens ist nach der 93. Formel $\triangle aco = bo^2 . \tan {}^2/_n R$ und nach der 99. $\triangle baf = bo^2 . \sin {}^2/_n R^2 . \tan {}^2/_n R$. Also hat man auch

$$\triangle aco : \triangle baf = 1 : \sin {}^2/_n R^2.$$

XV. Der Umfang des halben innern Polygondreiecks verhält sich zu dem Umfang des halben äußern Dreiecks, wie der Cosinus zum Sinus des halben Mittelpunktswinkels, oder wie die Einheit zur Tangente desselben Winkels; und der Umfang des halben äußern Polygondreiecks zu dem Umfang des halben äußern Dreiecks wie die Einheit zu dem Sinus des halben Mittelpunktswinkels.

$$bi + io + ob : ab + bi + ia = \cos {}^2/_n R : \sin {}^2/_n R = 1 : \tan {}^2/_n R$$
$$bo + oc + cb : ab + bi + ia = 1 : \sin {}^2/_n R.$$

Beweis. Nach Formel 82 ist $bi+io+ob = bo(1+\sin^2/_n R+\cos^2/_n R)$, und nach der 86. Formel $ab+bi+ia = bo . \tan^2/_n R(1+\sin^2/_n R+\cos^2/_n R)$, mithin auch $bi+io+ob : ab+bi+ia = 1 : \tan {}^2/_n R = \cos {}^2/_n R : \sin {}^2/_n R$.

Zweitens ist nach der 150. $bo+oc+cb = ao(1+\sin {}^2/_n R+\cos^2/_n R)$, und nach der 152. $ab+bi+ia = ao . \sin {}^2/_n R(1+\sin {}^2/_n R+\cos^2/_n R)$. Folglich hat man auch $bo+oc+cb : ab+bi+ia = 1 : \sin {}^2/_n R$.

XVI. Also verhalten sich auch die innern und äußern Polygondreiecke, jedes zu dem äußern abgeschnittenen Dreieck wie die Quadrate der Umfänge der entsprechenden halben Dreiecke.

$$\triangle bof : \triangle baf = (bi + io + ob)^2 : (ab + bi + ia)^2, \text{ und}$$
$$\triangle aco : \triangle baf = (bo + oc + cb) : (ab + bi + ia)^2.$$

Beweis. Es wird $\triangle bof : \triangle baf = \cos {}^2/_n R^2 : \sin {}^2/_n R^2 = 1 : \tan {}^2/_n R^2$, und $(bi+io+ob) : (ab+bi+ia) = \cos {}^2/_n R : \sin {}^2/_n R = 1 : \tan {}^2/_n R$, folglich $(bi+io+ob)^2 : (ab+bi+ia)^2 = \cos {}^2/_n R^2 : \sin {}^2/_n R^2 = 1 : \tan {}^2/_n R^2 = \triangle bof : \triangle baf$.

Ferner war $\triangle aco : \triangle baf = 1 : \sin {}^2/_n R^2$, und

$(bo + oc + cb) : (ab + bi + ia) = 1 : \sin {}^2/_n R$, daher

Hosted by Google

$$(bo + oc + cb)^2 : (ab + bi + ia)^2 = 1 : \sin \overline{{}^2/_n R}^2, \text{ und}$$
$$\triangle aco : \triangle baf = (bo + oc + cb)^2 : (ab + bi + ia)^2.$$

Ebenso ergeben sich noch aus dem Verhältnisse der Linien ai und ah, dem von uns so genannten Sinus adversus und der sogenannten Assecante mit ihren Complementen dem Cosinus adversus und der Coassecante folgende Sätze:

XVII. Bei demselben Kreise verhält sich die Secante zu dem Sinus adversus, wie die Einheit (Quadrat des Halbmessers) zu dem Quadrate des Sinus, und zweitens die Cosecante zu dem Cosinus adversus, wie die Einheit zu dem Quadrate des Cosinus.

$$\sec {}^2/_n R : \sin \text{adv.} {}^2/_n R = 1 : \sin \overline{{}^2/_n R}^2,$$
$$\text{cosec.} {}^2/_N R : \cos \text{adv.} {}^2/_N R = 1 : \cos \overline{{}^2/_N R}^2.$$

Beweis. Die Gleichung der 137. Formel ist $ao = ao$, und die der 138. $ai = ao . \sin \overline{{}^2/_n R}^2$, also ist auch $ao : ai = 1 : \sin \overline{{}^2/_n R}^2$, d. i. $\sec {}^2/_n R : \sin \text{adv.} {}^2/_n R = 1 : \sin \overline{{}^2/_n R}^2$. Mithin

$$\text{cosec.} (R - {}^2/_n R) : \cos \text{adv.} (R - {}^2/_n R) = 1 : \cos (R - \overline{{}^2/_n R}^2), \text{ oder}$$
$$\text{cosec} {}^2/_N R : \cos \text{adv.} {}^2/_N R = 1 : \cos \overline{{}^2/_N R}^2.$$

XVIII. Es verhält sich ferner bei ein und demselben Kreise die Assecante zu dem Sinus versus wie die Einheit zu dem Cosinus, und zweitens die Coassecante zu dem Cosinus versus wie die Einheit zu dem Sinus.

$$\text{assec} {}^2/_n R : \sin \text{vers.} {}^2/_n R = 1 : \cos {}^2/_n R, \text{ und}$$
$$\text{coassec.} {}^2/_N R : \cos \text{vers} {}^2/_N R = 1 : \sin {}^2/_N R.$$

Beweis. Die 139. Formel gibt uns $ah = ao (1 - \cos {}^2/_n R)$, und die 140. $hi = ao . \cos {}^2/_n R (1 - \cos {}^2/_n R)$, also $ah : hi = 1 : \cos {}^2/_n R$, d. i. $\text{assec} {}^2/_n R : \sin \text{vers} {}^2/_n R = 1 : \cos {}^2/_n R$.

Daher $\text{coassec} (R - {}^2/_n R) : \cos \text{vers} (R - {}^2/_n R) = 1 : \sin (R - {}^2/_n R)$ oder $\text{coassec.} {}^2/_N R : \cos \text{vers} {}^2/_N R = 1 : \sin {}^2/_N R$.

XIX. Der Inhalt des äußern Polygondreiecks verhält sich zu dem Quadrate des Halbmessers wie der Sinus zu dem Cosinus des halben Mittelpunktswinkels, oder wie die Tangente des halben Mittelpunktswinkels zur Einheit; und der Inhalt des ganzen äußern Polygons verhält sich zu dem Inhalte des Kreises, wie die Anzahl der Seiten des regulären Polygons n multiplizirt mit der Tangente des halben Mittelpunktswinkel zu π, oder wie n zu πmal der Cotangente.

$$\triangle aco : r^2 = \sin {}^2/_n R : \cos {}^2/_n R = \tan {}^2/_n R : 1 = 1 : \cot {}^2/_n R$$
$$\triangle ace : \pi r^2 = n . \sin {}^2/_n R : \pi . \cos {}^2/_n R = n . \tan {}^2/_n R : \pi = n : \pi . \cot {}^2/_n R.$$

Hosted by Google

Beweis. Nach der 93. Formel ist $\triangle a c o = \overline{b o}^{2} . \tan {}^{2}/_{n} R$, daher $\triangle a c o : r^2 = \tan {}^{2}/_{n} R : 1 = 1 : \cot {}^{2}/_{n} R = \sin {}^{2}/_{n} R : \cos {}^{2}/_{n} R$, und nach der 94. ist $a c e = \overline{b o}^{2} . n . \tan {}^{2}/_{n} R$, mithin da $b o = r$, auch $a c e : r^2 = n . \tan {}^{2}/_{n} R : 1$, und $a c e : \pi r^2 = n . \tan {}^{2}/_{n} R : \pi = n : \pi . \cot {}^{2}/_{n} R$.

XX. Der Inhalt des äußern Polygons verhält sich aber auch zu dem Inhalte des Kreises, wie die äußere Seite zu dem entsprechenden Bogen.

$$a c e : \pi r^2 = a c : b h f.$$

Beweis. Da nach dem vorigen Satze $a c e : \pi r^2 = n . \tan {}^{2}/_{n} R : \pi$ ist, so ist auch $a c e : \pi r^2 = 2 r . n . \tan {}^{2}/_{n} R : 2 \pi r = 2 r . \tan {}^{2}/_{n} R : \frac{2 \pi r}{n}$.

Nach Formel 76 ist aber $a c = b o . 2 \tan {}^{2}/_{n} R$, und nach Formel 372 ist $b h f = \frac{2 \pi r}{n}$, daher $a c e : \pi r^2 = a c : b h f$.

XXI. Daher verhalten sich auch beim äußern Polygon und dem eingeschriebenen Kreise die Inhalte zu einander wie ihre Umfänge.

$$a c e : \pi r^2 = a c + c e + e a : 2 \pi r.$$

Beweis. Es war nach dem vorigen Satze $a c e : \pi r^2 = a c : b h f$. Also ist nun auch $a c e : \pi r^2 = n . a c : n . b h f = a c + c e + e a : 2 \pi r$.

Hosted by Google

IV.

Geometrisches,

besonders das Verhältniß der Peripherie eines Kreises zu dem Durchmesser zu bestimmen.

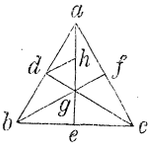
Aus den Jahren 1843 und 1844.

Hosted by Google

Hosted by Google

1. Lehrſatz. Beim regulären Dreieck verhalten ſich die Halbmeſſer des eingeſchriebenen Kreiſes und des umgeſchriebenen, oder die kleinen und großen Halbmeſſer zu einander, wie 1 : 2. (Siehe Figur 1.)

Fig. 1.



Beweis. Die aus den Spitzen eines regulären Dreiecks auf die gegenüberliegende Seite gezogenen ſenkrechten ſind bekanntlich einander gleich und durchſchneiden ſich in einem gemeinſamen Punkte. Dieſer Punkt theilt jede ſenkrechte in zwei Theile, von denen der eine gleich dem großen, der andere gleich dem kleinen Halbmeſſer des regulären Dreiecks iſt. Man nehme nun aus dem Punkt g von einem großen Halbmeſſer g a ein Stück g h = g d gleich dem kleinen Halbmeſſer, und ziehe d h, ſo iſt △ d g h gleichſeitig. Denn es iſt < g d a = R, < d a g = 30°, daher < d g a = 60°, alſo < g d h + < d h g = 120°, und da g d = g h, auch < g d h = < d h g = $\frac{120^0}{2}$ = 60°, mithin g d = g h = h d, daher < h d a = 90° − 60° = 30° = < d a h, alſo d h = h a, da d h = g h, auch g h = h a = d g, mithin g a = 2 d g.

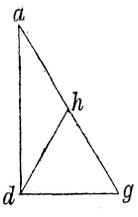
2. Lehrſatz. Das Verhältniß eines regulären Mehrecks zu dem eines Wenigerecks gleichen Umfangs muß ſtets kleiner ſein als 2 : 1.

Beweis. Der große Halbmeſſer des regulären Dreiecks iſt größer als der große Halbmeſſer jedes andern regulären Polygons gleichen Umfangs mit dem Dreieck (ſ. trigonometriſche Formeln, Lehrſatz III), daher um ſo mehr größer als der kleine Halbmeſſer eines ſolchen Polygons. Iſt alſo der kleine Halbmeſſer des Dreiecks gleich 1, ſo muß der kleine Halbmeſſer jedes andern regulären Polygons gleichen Umfangs kleiner als 2 ſein. Daraus aber folgt der Satz nach Trigonometriſche Formeln Lehrſatz I.

Zuſatz. Alſo iſt der Inhalt eines regulären Dreiecks ſtets mehr als die Hälfte jedes andern noch ſo vielſeitigen Polygons gleichen Umfangs mit jenem.

3. Lehrſatz. Verhalten ſich in einem rechtwinkeligen Dreiecke die ſchiefen Winkel wie 1 : 2, iſt alſo der eine gleich 30°, der andere 60° neben dem rechten Winkel 90°, ſo daß alle Winkel das Verhältniß 1 : 2 : 3 haben, ſo muß eine Seite, die Hyppotenuſe, noch einmal ſo groß ſein, als eine andere, die kleinere Kathete. (S. Figur 2).

Hosted by Google



Beweis. Im rechtwinkeligen Dreieck adg ist $< dga = 60^0$ und $< dag = 30^0$. Legt man nun an Punkt d auf Linie gd den Winkel $gdh = < dga = 60^0$, so muß auch $< dhg = 60^0$ sein, also $\triangle dhg$ gleichseitig, daher $dg = gh = hd$.

Da nun $< dag = 30^0$, so ist $< hda = < gda - < gdh = 90^0 - 60^0 = 30^0$, also auch $< hda = < dah$, und Seite $dh = ha$, da $dh = hg$, auch $hg = ha = dg$, mithin $dg = {}^1/_2\, ga$, oder $ga = 2dg$.

Die doppelt so große Seite kann aber nur die Hypotenuse, nicht die andere Kathete sein. Denn wäre $ad = 2dg$, so müßte, da $dg = {}^1/_2\, ag$ ist, die Seite $ad = ag$ sein, welches unmöglich. Wenn daher von einem rechtwinkeligen Dreieck gegeben wird eine Kathete noch einmal so groß als die andere, so können die schiefen Winkel sich nicht verhalten wie 1 : 2. Ferner kann die Hypotenuse nicht doppelt so groß sein als die größere Kathete, sondern als die kleinere. Denn wäre da $ad > dg$ auch $ag = 2ad$, also $ad = ah = hg$, so müßte, da auch bewiesen, daß $dg = {}^1/_2\, ag = hg$, $ad = dg$ sein, welches ein Widerspruch, indem ad dem größern Winkel agd gegenüberstehen soll, und also die größere Seite ist.

4. Lehrsatz. Ist in dem rechtwinkeligen Dreieck adg die Hypotenuse ag noch einmal so groß als die Kathete dg, so ist der Winkel $agd = 60^0$, alle Winkel des Dreiecks verhalten sich, wie 1 : 2 : 3.

Beweis. Wäre der Winkel agd größer oder kleiner als 60^0, so würde ein an Punkt g auf dg gelegter Winkel von 60^0 die Linie da in einem andern Punkte als a erreichen, und eine Verbindungslinie von diesem andern Punkte mit g, weil gleich 2dg auch gleich ga sein müssen, welches unmöglich. Also kann auch $< agd$ nicht größer oder kleiner sein als 60^0. Mithin $< gad = 30^0$, und $< adg : < agd : < dag = 3 : 2 : 1$.

Es war auf trigonometrischem Wege (Trigonometrische Formeln Lehrsatz I) bewiesen worden, daß bei gleichem Umfange sich zwei reguläre Polygone zu einander verhalten, wie die Halbmesser ihrer eingeschriebenen Kreise. Dieses kann aber auch nach bloß geometrischen Kenntnissen bewiesen werden. Also

5. Lehrsatz. Bei gleichem Umfange verhalten sich die Inhalte zweier regulärer Polygone zu einander, wie die Halbmesser ihrer eingeschriebenen Kreise. (S. Figur 3, a und b.)

Wenn $ab + bc + cd + de + ef + fa = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\delta + \delta\varepsilon + \varepsilon\alpha$, so auch $abcdef : \alpha\beta\gamma\delta\varepsilon = go : \zeta\omega = r : \varrho$.

Hosted by Google

Geometrischer Beweis.

Fig. 3, a.

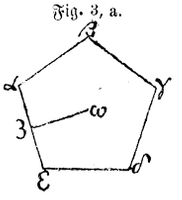
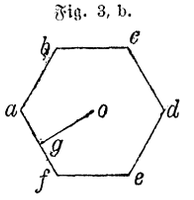


Fig. 3, b.



Es ist $abcdef = \frac{6fa.go}{2}$, weil das Sechseck sich in 6 gleiche Dreiecke gleicher Grundlinie und Höhe zertheilen läßt, die Grundlinie aber fa und die Höhe go ist. Ebenso ist auch $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon = 5\alpha\varepsilon . \frac{\zeta\omega}{2}$. Ist nun der Umfang beider Polygone gleich, so ist auch $6fa = 5\alpha\varepsilon$. Oder wenn man den gemeinsamen Umfang immer mit P bezeichnet, so ist auch $abcdef = \frac{P.go}{2}$, und $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon = P.\frac{\zeta\omega}{2}$. Daher $abcdef : \alpha\beta\gamma\delta\varepsilon = P.\frac{go}{2} : P.\frac{\zeta\omega}{2}$ $= go : \zeta\omega$.

Dieser Lehrsatz scheint bis jetzt unbekannt geblieben zu sein; er findet sich nicht in den Lehrbüchern der Geometrie, obwohl er unter ihren Lehrsätzen eine Stelle verdiente. Denn wie wir in der Folge sehen werden, kann durch ihn am besten das Verhältniß eines Kreises zu dem Durchmesser annähernd bestimmt werden.

6 Lehrsatz. Der Inhalt des regulären Dreiecks verhält sich zu dem des Sechsecks wie 2:3, wenn die Polygone gleichen Umfang haben. (S. Fig. 4, a u. b.)

Fig. 4 a.

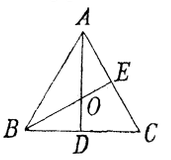
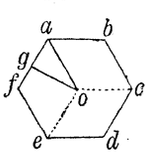


Fig. 4 b.



Beweis. Da $AB + BC + CA = U = ab + bc + cd + de + ef + fa$, so ist also $ABC : abcdef = OE : go$ nach dem vorigen Lehrsatze. Nun ist $\overline{OE}^2 = \overline{OA}^2 - \overline{AE}^2 = 4\overline{OE}^2 - (1/6\,U)^2$, also $(1/6\,U)^2 = 3\overline{OE}^2$, oder $OE = \frac{1/6\,U}{\sqrt{3}}$

Ebenso ist $\overline{go}^2 = \overline{ao}^2 - \overline{ag}^2 = (1/6\,U)^2 - (1/12\,U)^2 = U^2(4/144 - 1/144)$, oder $\overline{go}^2 = 3/144\,U^2$, also $go = \frac{U\sqrt{3}}{12}$. Daher hat man:

$$OE : go = \frac{U}{6\sqrt{3}} : \frac{U.\sqrt{3}}{12} = \frac{1}{\sqrt{3}} : \frac{\sqrt{3}}{2} = 2 : 3 = ABC : abcdef.$$

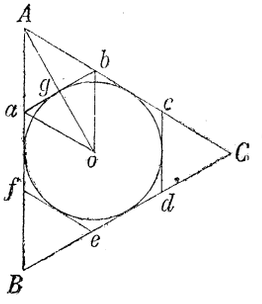
7. Lehrsatz. Das Rechteck des großen und des kleinen Halbmessers eines regulären Sechsecks ist halb so groß, als der Inhalt desjenigen regulären Dreiecks, welches mit dem Sechseck gleichen Umfang hat.

Hosted by Google

Beweis. Zieht man in dem Sechseck oc und oe, so wird dadurch das Sechseck in drei gleiche Theile getheilt, Parallelogramm aoef = oedc = ocba, und man hat aoef = $^1/_3$ abcdef = af.go = ao.go. Daher nun auch 2ao.go = $^2/_3$ abcdef = ABC, oder ao.go = $^1/_2$ ABC.

8. Lehrsatz. Das Quadrat des großen Halbmessers eines regulären Dreiecks ist dreimal so groß als das Quadrat des großen Halbmessers desjenigen regulären Sechsecks, welches mit dem Dreieck um denselben Kreis beschrieben ist. (S. Fig. 5.)

Fig. 5.



$\overline{Ao}^2 = 3\,\overline{bo}^2$.

Beweis. Der $<$gAb$=30^0$, also $<$gbA$=60^0$, Ab = 2gb. Der $<$gbc$=120^0$ und $<$gbo$=60^0$, $<$gob$=30^0$, daher $\triangle$Agb $\cong \triangle$gbo, bo$=$2gb. Nun ist $Ao = 2Ag = 2\sqrt{\overline{Ab}^2 - \overline{gb}^2}$, oder

$Ao = 2\sqrt{(2gb)^2 - \overline{gb}^2} = 2\sqrt{3\,\overline{gb}^2}$, oder

$Ao = 2gb\sqrt{3} = bo\sqrt{3}$. Daher

$Ao : bo = bo\sqrt{3} : bo = \sqrt{3} : 1$; $\overline{Ao}^2 : \overline{bo}^2 = 3:1$.

Zusatz 1. $Ao^2 = 12\,\overline{gb}^2$. Denn $\overline{Ao}^2 = 3\,\overline{bo}^2 = 3\,(2gb)^2 = 3.4\,\overline{gb}^2 = 12\,\overline{gb}^2$.

Zusatz 2. $\overline{bo}^2 = 4\,\overline{gb}^2 = {}^4/_3\,\overline{go}^2$. Denn $bo = 2gb$; $\overline{bo}^2 = 4\,\overline{gb}^2$, und $\overline{bo}^2 = {}^1/_3\,\overline{Ao}^2 = {}^1/_3\,(2go)^2 = {}^1/_3\,4\,\overline{go}^2 = {}^4/_3\,\overline{go}^2$.

Da in dem Dreieck Abo der $<$bAo$=30^0=<$boA, und also $<$Abo$=120^0$ sein muß, so läßt sich obiger Satz auf pythagoräische Weise also ausdrücken:

Das Quadrat der Hypotenuse eines vier Drittel rechtwinkeligen gleichschenkeligen Dreiecks ist dreimal so groß als das Quadrat eines Schenkels.

Weil in dem Dreieck Aab der Winkel aAb$=60^0$, auch $<$Aba$=60^0$, so auch $<$Aab$=60^0$, also $\triangle$Aab gleichseitig, gleich dem Polygondreieck des Sechsecks aob, gleich $^1/_6$ des Sechsecks abcdef; Ab$=$bo, Aa$=$ao$=$bc$=$cd$=$cC, aus demselben Grunde, wonach Ab$=$ab. Daher $\triangle$Aab $=\triangle$cCd $=\triangle$feB, und auch Aab + cCd + feB $= {}^1/_2$ abcdef; $\triangle$ABC : abcdef $= 3:2$. Also

Das reguläre Dreieck verhält sich zum regulären Sechseck gleichen Umfangs wie 2:3; das reguläre Dreieck aber zum regulären Sechseck gleichen eingeschriebenen Kreises wie 3:2.

Hosted by Google

9. Lehrsatz. Wenn bei einem Rhombus ein Winkel doppelt so groß ist als ein anderer, so ist die Summe der Quadrate der Diameter dieses Rhombus gleich der Summe der Quadrate der Durchmesser des gleichseitigen Quadrats. (S. Fig. 6, a u. b.)

Fig. 6 a.

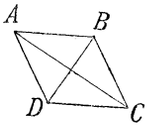
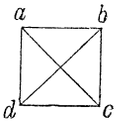


Fig. 6 b.



Es ist $DC = CB = BA = AD = ab = bc = cd = da$; $< ABC = 120^0$; $< BAD = 60^0$, $< dab = R = abc = bcd = cda$. Nun muß $\overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 = \overline{ac}^2 + \overline{bd}^2$ sein

Beweis. Es ist $\overline{AC}^2 = 3\,\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2$ nach dem vorigen Satze, aber $\triangle ADB \cong \triangle BDC$, also $< ABD = < DBC = 60^0 = < BCD = < CDB$, also auch $BD = DC = DA$; $\overline{BD}^2 = \overline{AD}^2$. Daher $\overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{AD}^2$, oder $\overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 = 4\,\overline{AB}^2 = 4\,\overline{ab}^2$, weil $AB = ab$. Auch ist $\overline{ac}^2 = \overline{ab}^2 + \overline{bc}^2 = \overline{bd}^2 = \overline{da}^2 + \overline{ab}^2$, also $\overline{ac}^2 + \overline{bd}^2 = 4\,\overline{ab}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BD}^2$.

Zusatz. $\overline{AC}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{bd}^2$.

Beweis. $\overline{AC}^2 = 3\,\overline{AB}^2 = 3\,\overline{ab}^2$, und $\overline{BD}^2 = \overline{AB}^2 = \overline{ab}^2$; ferner ist $\overline{bd}^2 = \overline{ad}^2 + \overline{ab}^2 = 2\,\overline{ab}^2$, also $\overline{BD}^2 + \overline{bd}^2 = 3\,\overline{ab}^2 = \overline{AC}^2$.

10. Lehrsatz. Unter allen regulären Polygonen gleichen Umfangs hat das Dreieck das größte Polygondreieck.

Beweis. Das reguläre Dreieck verhält sich zum regulären Sechseck gleichen Umfangs wie 2:3, also ihre Polygondreiecke, wie $^2/_3 : {}^3/_6 = 4:3$. Da nun das reguläre Dreieck stets größer sein muß, als die Hälfte jedes andern noch so vielseitigen Polygons gleichen Umfang nach Lehrsatz 2, Zusatz, das Dreieck aber nur aus 3 congruenten Polygondreiecken besteht, so müssen diese 3 schon größer sein als $3\,^1/_2$ Polygondreiecke des Siebenecks, also auch größer als 4 Polygondreiecke des Achtecks u. s. w. Daher ein Polygondreieck des Dreiecks auch größer als $\frac{3\,^1/_2}{3}$ des Siebenecks, als $^4/_3$ des Achtecks, daher um so mehr größer als 1 des Siebenecks, 1 des Achtecks und so weiter. Ebenso muß das Polygondreieck des Dreiecks größer sein als eins des Fünfecks. Denn es verhält sich Dreieck zum Sechseck wie 2:3. Da nun Fünfeck kleiner sein muß als Sechseck gleichen Umfangs, so auch Dreieck zum Fünfeck wie 2 zu weniger 3, also Polygondreiecke wie $^2/_3 : \frac{\text{weniger } 3}{5} = 10 : \text{weniger als } 9$.

Hosted by Google

Für das Verhältniß der Polygondreiecke des regulären Dreiecks und Vierecks gleichen Umfangs gilt ein anderer Beweis. (S. Fig. 7, a u. b.) Es ist

Fig. 7. a,

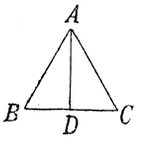
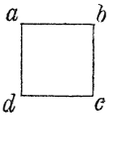


Fig. 7. b,



nemlich $\triangle ABC = BD \times DA =$

$$= \tfrac{1}{6} U \sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{DC}^2} = \tfrac{1}{6} U \sqrt{\tfrac{1}{9}U^2 - \tfrac{1}{36}U^2}$$

$$= \tfrac{1}{6} U^2 \sqrt{\frac{36-9}{9.36}} = \frac{U^2}{6.3.6}\sqrt{27} =$$

$\frac{U^2}{36}\sqrt{3}$. Also Polygondreieck von ABC ist gleich $\frac{U^2}{108}\sqrt{3}$. Der Inhalt des regulären Vierecks gleichen Umfangs ist $(\frac{1}{4}U)^2 = \frac{U^2}{16}$, also das Polygondreieck $\frac{U^2}{64}$. Daher Polygondreieck des regulären Dreiecks zum Polygondreieck des regulären Vierecks wie $\frac{U^2}{108}\sqrt{3} : \frac{U^2}{64} = \frac{1}{27}\sqrt{3} : \frac{1}{16} = 16\sqrt{3} : 27 =$ $16 . 1{,}732 : 27 = 27{,}712 : 27 = 277 : 270$.

Also bei gleichem Umfange hat das reguläre Dreieck ein größeres Polygondreieck als das reguläre Viereck, aber in demselben Kreise ist das Polygondreieck des regulären Vierecks 0,5 größer als das des regulären Dreiecks 0,433. Um denselben Kreis muß aber auch das Dreieck das größte Polygondreieck haben. Denn da die Inhalte regulärer Polygone hier mit der Anzahl der Seiten abnehmen, also Dreieck größer als Viereck, größer als Fünfeck u. s. w., Viereck größer als Fünfeck, so muß auch ein Drittel des Dreiecks größer sein als ein Drittel des Vierecks, des Fünfecks u. s. w., um so mehr also ein Drittel von dem Dreieck größer als $\frac{1}{4}$ des Vierecks, als $\frac{1}{5}$ des Fünfecks.

Um denselben Kreis nehmen daher die Polygondreiecke mit der Anzahl der Seiten der Polygone wie die Inhalte der Polygone selber ab.

11. Lehrsatz. Wenn reguläre Polygone gleichen Umfang haben, so wird das Zunehmen des Inhalts vom Dreieck zum Sechseck größer sein als vom Sechseck zum Hunderteck, Tausendeck, Unendlicheck und dem Kreise.

Beweis. Der Inhalt des regulären Dreiecks zu dem des Sechsecks verhält sich wie 2 : 3 bei gleichem Umfange der Polygone nach 6 Lehrsatz. Dann aber war auch nach 2 Lehrsatz der Inhalt des regulären Dreiecks stets mehr als die Hälfte jedes andern noch so vielseitigen Polygons gleichen Umfangs. Also Dreieck zum Unendlicheck wie 2 zu weniger 4. Nun verhält sich $2 : 3 = 3 : 4\frac{1}{2}$. Sollte daher das Sechseck zum Unendlicheck sich eben so verhalten, wie das Dreieck zum Sechseck, so müßte der Quotient $\frac{3}{2}$ betragen. Aber 3 zu weniger 4 heißt, daß man keinen $\frac{3}{2}$ Theil des Sechsecks nehmen darf, um das Un-

Hosted by Google

endlicheck zu bilden, wie das Sechseck aus dem $^3/_2$ Theil eines regulären Dreiecks entsteht. Ein Dreieck dreihalbmal genommen ist der Inhalt des Sechsecks $2 . {}^3/_2 = 3$, aber dieses Sechseck dreihalbmal genommen größer als jedes Polygon von noch so vielen Seiten gleichen Umfangs, denn $3 . {}^3/_2 = {}^9/_2 = 4\,{}^1/_2$. Vom Dreieck zum Sechseck gleichen Umfangs ist die Zunahme das halbe Dreieck, denn im Verhältniß $2:3$ ist $3 = {}^3/_2 . 2 = 1\,{}^1/_2 . 2 = 2 + {}^2/_2$, also Sechseck gleich Dreieck vermehrt um das halbe Dreieck. Aber das Unendlicheck ist nicht nur kleiner als das Sechseck vermehrt um das halbe Sechseck, sondern auch, da das Dreieck stets mehr als die Hälfte des Unendlichecks sein muß, das Unendlicheck kleiner als das Sechseck vermehrt um das halbe Dreieck. Die Zunahme vom Sechseck zum Unendlicheck beträgt kein halbes Dreieck, während die Zunahme vom Dreieck zum Sechseck ein halbes Dreieck ausmacht.

12. Lehrsatz. Wenn man in einem rechtwinkeligen gleichschenkeligen Dreieck eine Kathete nach und nach verdoppelt, verdreifacht, vervierfacht und so weiter, so verhalten sich die dadurch neu gebildeten Hypotenusen zu einander, wie die Wurzeln der um eins vermehrten Quadrate derjenigen Zahlen, welche die Stellenreihe der Hypotenusen bezeichnen; verdoppelt, verdreifacht, vervierfacht man aber die Hypotenuse um die gegebene Kathete, so verhalten sich die neugebildeten Katheten wie die Wurzeln der um eins verminderten Quadrate. (S. Fig. 8.)

Fig. 8.

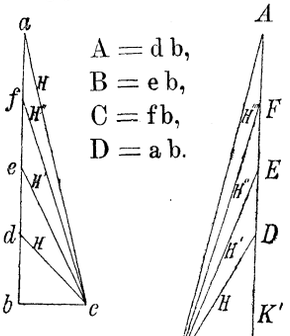
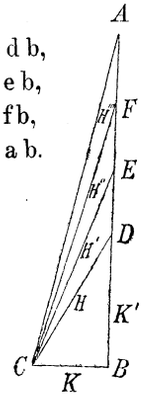


Fig. 9.



I. Kathete $B = 2$. Kathete A, $C = 3\,A$, $D = 4\,A$, so ist Hypotenuse $H' = A . \sqrt{5}$, $H'' = A . \sqrt{10}$; $H''' = A . \sqrt{17}$; $H' : H'' : H''' = \sqrt{5} : \sqrt{10} : \sqrt{17}$; oder $H' : H'' : H''' = \sqrt{4+1} : \sqrt{9+1} : \sqrt{16+1}$.

II. (S. Fig. 9.) Hypotenuse $H =$ $= 2$. Kathete K, ($D\,C = 2\,B\,C$), $H' = 3\,K$, $H'' = 4K$, so ist $H : H' : H'' = \sqrt{4-1} : \sqrt{9-1} : \sqrt{16-1} = \sqrt{3} : \sqrt{8} : \sqrt{15}$.

Beweis. In dem rechtwinkeligen Dreieck $d\,b\,c$ ist $\overset{-2}{d\,c} = \overset{-2}{d\,b} + \overset{-2}{b\,c}$, und weil $d\,b = bc$, auch $\overset{-2}{d\,c} = 2\,\overset{-2}{b\,c}$, also $d\,c = b\,c\sqrt{2} = b\,c\sqrt{1^2+1}$.

Ferner ist nun, da auch $e\,d = d\,b$ gemacht worden, und $\overset{-2}{e\,c} = \overset{-2}{b\,c} + \overset{-2}{e\,b}$ ist, $\overset{-2}{e\,c} = \overset{-2}{b\,c} + 4\,\overset{-2}{b\,c} = 5\,\overset{-2}{b\,c}$, also $e\,c = b\,c\sqrt{5} = b\,c\sqrt{2^2+1}$. Dann $\overset{-2}{f\,c} = \overset{-2}{b\,c} + \overset{-2}{f\,b} = \overset{-2}{b\,c} + (3\,b\,c)^2 = 10\,\overset{-2}{b\,c}$, also ist $f\,c = b\,c\sqrt{10} =$

Hosted by Google

$bc\sqrt{3^2+1}$. Endlich $\overline{ac}^2 = \overline{bc}^2 + \overline{ab}^2 = \overline{bc}^2 + (4bc)^2 = 17\overline{bc}^2$, $ac = bc\sqrt{17} = bc\sqrt{4^2+1}$. Allgemein: $\overline{a'c}^2 = \overline{bc}^2 + (ba')^2 = \overline{bc}^2 + (n \cdot bc)^2 = \overline{bc}^2(1+n^2)$, $ac' = bc\sqrt{n^2+1}$. Mithin verhält sich auch $dc : ec : fc : ac : a'c = bc\sqrt{2} : bc\sqrt{5} : bc\sqrt{10} : bc\sqrt{17} : bc\sqrt{n^2+1}$, oder $H : H' : H'' : H''' : H^n = \sqrt{2} : \sqrt{5} : \sqrt{10} : \sqrt{17} : \sqrt{n^2+1}$.

Zweitens ist in dem rechtwinkeligen Dreieck DBC der Hypotenuse $DC = 2BC$, und im rechtwinkeligen Dreieck ECB die Hypotenuse $EC = 3BC$, ebenso $FC = 4BC$, und $AC = 5BC$. Nun ist auch $\overline{DB}^2 = \overline{DC}^2 - \overline{CB}^2 = 4\overline{BC}^2 - \overline{BC}^2 = 3\overline{BC}^2$, also $DB = BC\sqrt{3} = BC\sqrt{4-1} = BC\sqrt{2^2-1} = K'$, und $\overline{EB}^2 = \overline{EC}^2 - \overline{BC}^2 = (3BC)^2 - \overline{BC}^2 = 8\overline{BC}^2$, also $EB = BC\sqrt{8} = BC\sqrt{3^2-1} = K'$. Ferner $\overline{FB}^2 = \overline{FC}^2 - \overline{CB}^2 = (4BC)^2 - \overline{BC}^2 = 15\overline{BC}^2$, also $FB = BC\sqrt{15} = BC\sqrt{4^2-1} = K'''$. Zuletzt $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{BC}^2 = (5BC)^2 - \overline{BC}^2 = 24\overline{BC}^2$, also $AB = BC\sqrt{24} = BC\sqrt{5^2-1} = K''''$. Also auch allgemein $A'B = BC\sqrt{n^2-1}$. Mithin verhält sich $DB : EB : FB : AB = BC\sqrt{8} : BC\sqrt{15} : BC\sqrt{24}$, oder $K' : K'' : K''' : K'''' = \sqrt{3} : \sqrt{8} : \sqrt{15} : \sqrt{24}$.

13. Lehrsatz. Wenn man in einem solchen rechtwinkeligen Dreieck bgo (S. Fig. 10), dessen Hypotenuse $bo = 2bg$, also $< bog = 30^0$ ist, die Kathete go verlängert bis $ok = bo = 2gb$ wird, dann b mit k verbindet, wodurch also ein anderes rechtwinkeliges Dreieck bgk entsteht, dessen spitzer Winkel $bkg = \frac{1}{2}bog = 15^0$ ist; wenn man dann wieder $kl = bk$ macht, auf der verlängerten gk, und l mit b verbindet, wodurch das rechtwinkelige Dreieck bgl gebildet wird, in welchem der spitze Winkel $blg = \frac{1}{2}bkg = \frac{1}{4}bog = 7\frac{1}{2}^0$ wird; wenn endlich so fortgefahren wird gl zu verlängern, daß wieder $lm = bl$ ist, und bm gezogen wird, wodurch der Winkel $bmg = 3\frac{3}{4}^0$ wird in dem rechtwinkeligen Dreieck bgm: so sind erstens die Hypotenusen solcher gebildeten Dreiecke:

a) $bo = 2gb$

b) $bk = 2gb\sqrt{2+\sqrt{3}}$

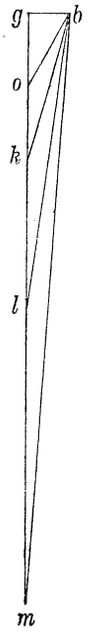
c) $bl = 2gb\sqrt{2+\sqrt{3}}\ \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}$

Hosted by Google

d) $bm = 2gb\sqrt{2+\sqrt{3}}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$;

zweitens sind die Katheten:

Fig. 10.



a) $go = gb\sqrt{3}$

b) $gk = gb\left(\sqrt{3}+2\right)$

c) $gl = gb\left(\sqrt{3}+2+2\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)$

d) $gm = gb\left(\sqrt{3}+2+2\sqrt{2+\sqrt{3}}+\right.$

$\left.+2\sqrt{2+\sqrt{3}}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\right)$.

Beweis. Die Hypotenuse bo ist 2mal gb angenommen, oder wäre $< bog = 30^0$ gegeben, so muß $bo = 2gb$ sein nach 3 Lehrsatz. Nun ist aber auch ferner $\overline{go}^{-2} = \overline{bo}^{-2} - \overline{gb}^{-2} = 4\overline{gb}^{-2} - \overline{gb}^{-2} = 3\overline{gb}^{-2}$, also $go = gb\sqrt{3}$. Ferner ist $\overline{bk}^{-2} = \overline{bg}^{-2} + \overline{gk}^{-2} = \overline{bg}^{-2} + (go + ok)^2 = \overline{gb}^{-2} + (gb\sqrt{3} + 2gb)^2 = \overline{gb}^{-2} + \overline{gb}^{-2}(\sqrt{3}+2)^2 = \overline{gb}^{-2}(1 + 7 + 4\sqrt{3}) = \overline{gb}^{-2}(8 + 4\sqrt{3}) = 4\overline{gb}^{-2}(2+\sqrt{3})$, also $bk = 2gb\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

Ferner ist $gk = go + ok = go + ob = gb\sqrt{3} + 2gb = gb(\sqrt{3}+2)$.

Drittens ist $gl = gk + kl = gk + bk = gb\left(\sqrt{3}+2+2\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)$;

$\overline{bl}^{-2} = \overline{gb}^{-2} + \overline{gl}^{-2} = \overline{gb}^{-2} + \overline{gb}^{-2}\left(\sqrt{3}+2+2\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^2 =$

$\overline{gb}^{-2}\left(16 + 8\sqrt{3} + 4\sqrt{3}\sqrt{2+\sqrt{3}} + 8\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)$;

$\overline{bl}^{-2} = 4\,\overline{gb}^{-2}\left(4 + 2\sqrt{3} + \sqrt{3}\sqrt{2+\sqrt{3}} + 2\sqrt{2+\sqrt{3}}\right) =$

$4\overline{gb}^{-2}\left(4 + 2\sqrt{3} + \left(\sqrt{3}+2\right)\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)$,

$\overline{bl}^{-2} = 4\overline{gb}^{-2}\left(2\left(2+\sqrt{3}\right) + \left(2+\sqrt{3}\right)\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)$, also auch

Hosted by Google

$\overline{bl}^{-2} = 4\,\overline{gb}^{-2}(2+\sqrt{3})\left(2+\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)$, daher

$$bl = 2\,gb\sqrt{2+\sqrt{3}}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}.$$

Viertens ist endlich die Kathete $gm = gl + lm = gl + bl$, oder

$$gm = gb\left(\sqrt{3}+2+2\sqrt{2+\sqrt{3}}+2\sqrt{2+\sqrt{3}}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\right).$$

Zuletzt $\overline{bm}^{-2} = \overline{gb}^{-2} + \overline{gm}^{-2} =$

$$= \overline{gb}^{-2} + \overline{gb}^{-2}\left(2+\sqrt{3}+2\sqrt{2+\sqrt{3}}\left(1+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\right)\right)^2, \text{ oder}$$

$$\overline{bm}^{-2} = \overline{gb}^{-2}$$
$$+\overline{gb}^{-2}\left(\left(2+\sqrt{3}\right)^2+4\left(2+\sqrt{3}\right)\sqrt{2+\sqrt{3}}\left(1+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\right)\right.$$
$$\left.+4\left(2+\sqrt{3}\right)\left(1+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\right)^2\right),$$

$$\overline{bm}^{-2} = \overline{gb}^{-2}\left(\left(8+4\sqrt{3}\right)\left(1+\left(1+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\right)\times\right.\right.$$
$$\left.\left.\times\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}+1+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\right)\right)\right);$$

$$\overline{bm}^{-2} = 4\,\overline{gb}^{-2}\left(2+\sqrt{3}\right)\left(1+\sqrt{2+\sqrt{3}}+\right.$$
$$+\sqrt{2+\sqrt{3}}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+1+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+$$
$$\left.+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+2+\sqrt{2+\sqrt{3}}\right).$$

$$\overline{bm}^{-2} = 4\,\overline{gb}^{-2}\left(2+\sqrt{3}\right)\left(4+2\sqrt{2+\sqrt{3}}+\right.$$
$$\left.+\sqrt{2+\sqrt{3}}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+2\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\right),$$

$$\overline{bm}^{-2} = 4\,\overline{gb}^{-2}\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2\left(2+\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)+\right.$$
$$\left.+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\left(2+\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)\right),$$

$$\overline{bm}^{-2} = 4\,\overline{gb}^{-2}\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)\left(2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\right),$$

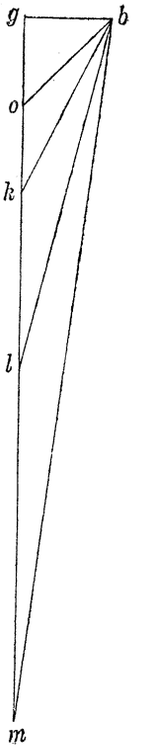
daher $bm = 2gb\sqrt{2+\sqrt{3}}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$.

14. Lehrsatz. Ist das rechtwinkelige Dreieck bgo auch zugleich gleich-

Hosted by Google

schenkelig, so werden die Hypotenusen und Katheten solcher gebildeten Dreiecke sein also: (S. Fig. 10.)

Fig. 10.



1) Die Hypotenusen:

a) $b\,o = g\,b\sqrt{2}$

b) $b\,k = g\,b\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$

c) $b\,l = g\,b\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$

d) $b\,m = g\,b\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\times$
$\times\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$

2) die Katheten:

a) $g\,o = g\,b$

b) $g\,k = g\,b\,(1+\sqrt{2})$

c) $g\,l = g\,b\left(1+\sqrt{2}+\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)$

d) $g\,m = g\,b\left(1+\sqrt{2}+\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}+\right.$
$\left.+\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\right).$

Beweis. Da $g\,o = g\,b$ ist, so wird $b\,o^{-2} = 2\,g\,b^{-2}$, folglich $b\,o = g\,b\sqrt{2}$.

Ferner $g\,k = g\,o + o\,k = g\,b + g\,b\sqrt{2} = g\,b\,(1+\sqrt{2})$. Dann ist

$$b\,k = \sqrt{g\,b^{-2} + g\,b^{-2}(1+\sqrt{2})^{-2}} = g\,b\sqrt{1+3+2\sqrt{2}} =$$
$$g\,b\sqrt{4+2\sqrt{2}} = g\,b\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}.$$

Nun ist $g\,l = g\,k + k\,l = g\,k + b\,k = g\,b\,(1+\sqrt{2}) +$
$+ g\,b\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$. Mithin $g\,l = g\,b\left(1+\sqrt{2}+\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)$.

Ebenso wird

$$b\,l = \sqrt{g\,b^{-2} + g\,l^{-2}} = \sqrt{g\,b^{-2} + g\,b^{-2}\left(1+\sqrt{2}+\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)^{-2}} =$$
$$= g\,b\sqrt{1+\left(1+\sqrt{2}\left(1+\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)\right)^{2}},$$

Hosted by Google

$$bl = gb\sqrt{1+1+2\sqrt{2}\left(1+\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)+2\left(3+2\sqrt{2+\sqrt{2}}+\sqrt{2}\right)}.$$

$$bl = gb\sqrt{8+4\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{2}}\left(2\sqrt{2}+4\right)} =$$

$$= gb\sqrt{\left(2+\sqrt{2}\right)\left(4+2\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)},$$

$$bl = gb\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}.$$

Darauf ist $gm = gl + bl = gb\left(1+\sqrt{2}+\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}\right.$

$$\left.+\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\right).$$

Endlich $bm = \sqrt{\overline{gb}^{-2}+\overline{gm}^{-2}}$, oder es wird auch

$$bm = gb\sqrt{1+\left(1+\sqrt{2}\left(1+\sqrt{2+\sqrt{2}}+\right.\right.}$$

$$\left.\left.+\sqrt{2+\sqrt{2}}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\right)\right)^2},$$

$$bm = gb\sqrt{2+2\sqrt{2}\left(1+\sqrt{2+\sqrt{2}}+\right.}$$

$$\left.+\sqrt{2+\sqrt{2}}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\right)+2\left(1+2\sqrt{2+\sqrt{2}}\left(1+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\right)\right.$$

$$\left.+\left(2+\sqrt{2}\right)\left(1+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\right)^2\right}$$

$$bm = gb\sqrt{2\left(2+\sqrt{2}\right)+2\sqrt{2+\sqrt{2}}\left(\sqrt{2}+2\right)+}$$

$$+2\sqrt{2+\sqrt{2}}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\left(\sqrt{2}+2\right)+$$

$$\left.+\left(2+\sqrt{2}\right)\left(2+4\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}+4+2\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)\right}$$

$$bm = gb\sqrt{\left(2+\sqrt{2}\right)\left(8+2\sqrt{2+\sqrt{2}}+\right.}$$

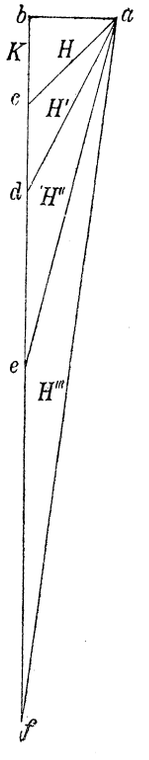
$$\left.+2\sqrt{2+\sqrt{2}}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}+4\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}+2\sqrt{2+\sqrt{2}}\right),$$

Hosted by Google

$$bm = gb\sqrt{(2+\sqrt{2})\left(8+4\sqrt{2+\sqrt{2}}+\right.}$$
$$\left.+2\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}+2\right)\right},$$
$$bm = gb\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}\sqrt{4+2\sqrt{2+\sqrt{2}}+}$$
$$+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}+2\right),$$
$$bm = gb\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}.$$

Aufgabe. Aus irgend einem solchen ausgerechneten rechtwinkeligen Dreieck, der aus den Katheten bestimmten Hypotenuse und dem erhaltenen Spitzenwinkel als einem halben Mittelpunktswinkel irgend eines regulären Polygons die folgenden Hypotenusen solcher rechtwinkeligen Dreiecke zu finden und zu berechnen, welche mit dem ursprünglichen eine gemeinsame basirende Kathete haben, und solche Spitzenwinkel erhalten, daß dieselben ebenfalls halbe Mittelpunktswinkel, immer die Hälfte des vorhergehenden Spitzenwinkels ausmachen. (S. Fig. 11.)

Fig. 11.



Seite ab gegeben, $< b = R$, und Seite $bc = K = n \cdot ba$, aus ab bestimmt, hier $bc = ba$, indem $n = 1$ ist, also $< bca$ gefunden 45^0 ein halber Mittelpunktswinkel, Seite $ac = H$ gefunden aus ab und bc, nemlich $H = ba\sqrt{2}$.

Auflösung. In dem rechtwinkeligen $\triangle abd$, worinnen $bd = bc + cd = bc + ca$ gemacht worden, hat man $\overset{-2}{ad} = \overset{-2}{ab} + \overset{-2}{bd}$, oder $H'^2 = \overset{-2}{ab} + (K+H)^2 = \overset{-2}{ab} + K^2 + H^2 + 2K \cdot H = 2H^2 + 2K \cdot H = 2H(H+K)$, also $H' = \sqrt{2}\sqrt{H}\sqrt{H+K}$. Ebenso $\overset{-2}{ae} = \overset{-2}{ab} + \overset{-2}{be}$, $\overset{2}{H''} = \overset{-2}{ab} + (K+H+H')^2$, $\overset{2}{H''} = \overset{-2}{ab} + (K+H)^2 + \overset{2}{H'} + 2H'(K+H) = 2\overset{2}{H'} + 2H'(K+H)$, oder $\overset{2}{H''} = 2H'(H'+K+H)$, also $H'' = \sqrt{2}\sqrt{H'}\sqrt{H'+H+K}$.

So wird ferner $\overset{-2}{af} = \overset{-2}{ab} + \overset{-2}{bf} = (K+H+H'+H'')^2$, oder $\overset{-2}{af} = \overset{-2}{ab} + (K+H+H')^2 + \overset{2}{H''} + 2H''(K+H+H')$, das ist $\overset{2}{H'''} = 2\overset{2}{H''} + 2H''(K+H+H') = 2H''(H''+H'+H+K)$, daher

$H''' = \sqrt{2}\sqrt{H'''}\sqrt{H'' + H' + H + K}$. So wird nun auch $H'''' =$
$= \sqrt{2}\sqrt{H'''}\sqrt{H''' + H'' + H' + H + K}$, und so weiter.

Da nun $H + K$, oder $H' + H + K$ u. s. w. immer die Kathete zu der zugehörigen Hypotenuse bezeichnet, so fließt daraus der Satz, daß die neue Hypotenuse immer gleich ist der Wurzel aus dem doppelten Rechteck der früheren Hypotenuse in die Kathete. $H' = \sqrt{2H \,.\, K}$.

15. Lehrsatz. Die jedesmalige Hypotenuse solcher gebildeten rechtwinkeligen Dreiecke, deren Spitzenwinkel die Hälfte des vorhergehenden halben Mittelpunktswinkels ist, verhält sich zu ihrer Kathete, wie zwei zu dem letzten Faktor, woraus die Hypotenuse zusammengesetzt ist; daher ist die Kathete auch immer gleich der Hypotenuse multiplicirt mit dem halben letzten Faktor der Hypotenuse. Wogegen die frühere Hypotenuse sich zu der Hypotenuse verhält, wie die Einheit zu dem letzten Faktor.

$H' : K' = 2 : \omega$; $K' = \frac{H' \,.\, \omega}{2}$ und $H : H' = 1 : \omega$.

Beweis. Nach 14. Lehrsatz war die vierte Hypotenuse b m, welche wir H''' nennen, gleich

$$g\,b\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}},$$

und die vierte Kathete $g\,m = K''' = g\,b\Big(1 + \sqrt{2} + \sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}} + \sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\Big)$.

Nun ist auch nach dem Satze der Aufgabe $H' = \sqrt{2H \,.\, K'}$, oder $H''' = \sqrt{2H'' \,.\, K'''}$, daher

$$g\,b\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} =$$

$$= \sqrt{2H'' \,.\, K'''} = H''' = H''\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}},\ \text{mithin}$$

$$\frac{H''^2\Big(2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\Big)}{2H''} = K''' = \frac{H''\Big(2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\Big)}{2}$$

$$= \frac{H''\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}{2} \text{ oder } K'''$$

Hosted by Google

oder $K''' = H''' \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}{2}$, folglich verhält sich auch

$$H''' : K''' = 2 : \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}.$$

Zweitens ist $\frac{H''\left(2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\right)}{2} =$

$\frac{H'''\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}{2}$ als gleich demselben Werth K'''. Folglich ergibt sich daraus

$$H'' : H''' = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} : 2 + \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \text{ das heißt}$$

$$H'' : H''' = 1 : \sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$$

Zusatz 1. Die Summe aller Größen, welche summirt werden, um die Kathete zu erhalten, ist gleich dem letzten Summandus multiplicirt mit der Einheit, vermehrt um den halben letzten Faktor des letzten Summandus.

$$1+\sqrt{2}+\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}+\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$
$$=\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\left(1+\tfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\right).$$

Beweis. Nach dem vorhergehenden Satze ist

$K''' = \frac{H''\left(2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\right)}{2}$, auch

$$K''' = g\,b\left(1+\sqrt{2}+\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}\right.$$
$$\left.+\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\right).$$ Also

$$g\,b\left(1+\sqrt{2}+\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}+\right.$$
$$\left.\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\right) = \frac{H''\left(2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\right)}{2},$$

Hosted by Google

$$\text{g b}\left(1+\sqrt{2}+\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}+\right.$$
$$\left.\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\right)=$$
$$\text{g b}\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\left(1+{}^1\!/_2\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\right),$$
$$1+\sqrt{2}+\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}+\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$
$$=\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\left(1+{}^1\!/_2\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\right).$$

Auch wird ein anderer Beweis durch die Vollziehung der angezeigten Multiplikation. Also

$$\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\left(1+{}^1\!/_2\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\right)=$$
$$=\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}+$$
$$+{}^1\!/_2\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}\left(2+\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)=$$
$$=\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}+\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}+$$
$$+{}^1\!/_2\sqrt{2}\left(2+\sqrt{2}\right)=\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}+$$
$$+\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}+\sqrt{2}+1.$$

Zusatz 2. Die Faktoren, aus welchen die Hypotenuse zusammengesetzt ist, stehen in einem solchen Verhältniß zu einander, daß jeder folgende größer sein muß, als der zunächst vorhergehende. Der kleinste also der erste, dennoch größer als die Einheit, und so sehr man auch die Hypotenuse verlängern mag, so viele Faktoren sie auch enthält, so muß der letzte größeste dennoch weniger als zwei betragen.

Beweis. Erstens muß $\sqrt{2}<\sqrt{2+\sqrt{2}}$, und $\sqrt{2+\sqrt{2}}<$ $<\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$ sein. Denn es ist $\sqrt{2}=1{,}4142135$, also $\sqrt{2+\sqrt{2}}=\sqrt{3{,}4142135}$, mithin $\sqrt{2+\sqrt{2}}>\sqrt{3}$, oder $\sqrt{2+\sqrt{2}}>1{,}7320508$. Nun ist aber auch $1{,}7320508>1{,}4142135$, daher $\sqrt{2+\sqrt{2}}>1{,}4142135$, $\sqrt{2+\sqrt{2}}>\sqrt{2}$.

Hosted by Google

Ferner $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} > \sqrt{2+\sqrt{2}}$, denn zu dem ersten 2 des ersten Ausdrucks wird $\sqrt{2+\sqrt{2}}$, also etwas Größeres hinzuaddirt als zu dem ersten 2 des zweiten, nemlich $\sqrt{2}$.

Zweitens beträgt der letzte größeste Faktor dennoch weniger als zwei. Denn nach dem Lehrsatz, welcher so eben bewiesen wurde, verhält sich die frühere Hypotenuse immer zu der Hypotenuse wie die Einheit zu dem letzten Faktor der Hypotenuse, oder $H : H' = 1 : \omega$. Da nun H' die Seite eines Dreiecks ist, und H in demselben Dreieck eine gleichschenkelige Linie, so daß also H' die Grundlinie und H ein mit der dritten Seite gleicher Schenkel ist, so ist $H' < 2H$, weil in jedem Dreieck eine Seite kleiner sein muß als die Summe der beiden andern. Da nun $\omega = \frac{H'}{H}$ oder $H : H' = 1 : \omega$, so würde nur in dem Falle, wenn $H' = 2H$, auch $\omega = 2$ sein können, und größer, wenn $H' > 2H$. Weil aber $H' < 2H$, so muß auch immer $\omega < 2$ sein.

Ausgerechnete Faktoren für einige Hypotenusen:

1,4142135 . 1,8477590 . 1,9615705 . 1,9903694 . 1,9975909 . 1,9993976.
1,9998494 . 1,9999623 . 1,9999905 . 1,9999976 . 1,9999994 . 1,9999998.

Werden diese Faktoren unter einander multiplicirt, so erhält man als Resultat die Zahl 2607,59389. So groß muß also die zwölfte Hypotenuse sein, wenn die basirende Kathete gleich der Einheit genommen wird. Nun wird nach 15. Lehrsatz auch die zwölfte andere Kathete gefunden, indem man die zwölfte Hypotenuse noch mit ihrem halben letzten Faktor multiplicirt, nemlich mit 0,9999999. Dadurch erhält man die Zahl 2607,59363. Die Uebereinstimmung der Hypotenuse und der Kathete ist aber der Halbmesser eines solchen Kreises, welcher mit dem Polygon gleichen Umfang hat (S. Trigonometrische Formeln Lehrs. III.). Da nun die halbe Seite des Polygons immer für die Einheit gerechnet wird, so ist beim zwölften Halbmesser die Anzahl der halben Seiten des Polygons gleich 2^{12+2}, weil vom regulären Viereck ausgegangen wurde, dieses aber 2^3 Seitengrößen haben muß; denn die halbe Seite war 1, nun gibt es in diesem Falle 4 Seiten, also beträgt die Größe der Seiten 8. Ebenso nun im zwölften Falle $2^{14} = 16384$. Also auch gleiche Peripherie eines Kreises 16384. Mithin hat man auch

$P : D = 16384 : 2 . 2607{,}593 = 8192 : 2607{,}593$, das heißt:

$P : D = 3{,}14159 : 1$.

16. Lehrsatz. Jede solche Hypotenuse läßt sich auch aus ihrem letzten Faktor berechnen. Es ist nemlich die Hypotenuse gleich einem Bruche, dessen

Hosted by Google

Zähler die Einheit ist, der Nenner aber die Quadratwurzel aus der um das Quadrat des halben letzten Faktors verminderten Einheit.

$$h^{VI} = abcdef = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{f^2}{4}}}; abcdefghiklm = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{m^2}{4}}}.$$

Beweis. Nennt man die Faktoren $\sqrt{2}, \sqrt{2+\sqrt{2}}$, oder 1,4142135, 1,8477590 u. s. w. a, b u. s. w., so daß der sechste Faktor f, und der zwölfte m ist, so heißt die sechste Hypotenuse nach ihren Faktoren ausgedrückt

$$abcdef.\frac{f}{2} \text{ und die zwölfte } abcdefghiklm.\frac{m}{2}.$$

Nun hat man auch nach dem pythagoräischen Lehrsatze

$a^2b^2c^2d^2e^2f^2 = 1 + \frac{a^2b^2c^2d^2e^2f^2f^2}{4}$, mithin $1 = a^2b^2c^2d^2e^2f^2 - \frac{a^2b^2c^2d^2e^2f^4}{4}$,

oder $1 = a^2b^2c^2d^2e^2f^2\left(1-\frac{f^2}{4}\right)$, auch $1 = abcdef\sqrt{1-\frac{f^2}{4}}$, also ist

$$abcdef = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}f\right)^2}} = \frac{2}{\sqrt{4-f^2}}.$$

Jene sechs ersten Faktoren mit einander multiplicirt geben die Zahl 40,747 gleich der sechsten Hypotenuse, und dieses noch mit 0,9996988 = $^1/_2$ f multiplicirt gibt die sechste Kathete 40,735. Also ist der sechste gemeinsame Halbmesser 40,7. Eben dieses nun einfacher nach diesem Lehrsatze berechnet. Denn das Quadrat von 0,9996988 ist 0,99939767. Wird dieses von Eins abgezogen, so bleibt 0,0006023, daraus die Quadratwurzel gezogen gibt 0,02454, und dieses zuletzt in 1 dividirt macht 40,748.

Bestehet aber der letzte Faktor aus der Einheit und lauter Neunen als Decimalen, so kann man daraus wieder die Hypotenuse nicht bestimmen Denn es wäre zum Beispiel die zwölfte Hypotenuse =

$$= \frac{1}{\sqrt{1-0{,}9999999^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-0{,}9999998}} = \frac{1}{\sqrt{0{,}0000002}} =$$

$$= \frac{10000}{\sqrt{20}}, \text{ welches ohne weiteres 2236 für den Werth der Hypotenuse geben}$$

würde, da doch dieselbe 2607,593 beträgt.

17. Lehrsatz. Die Peripherie eines Kreises verhält sich zu ihrem Durch-

Hosted by Google

messer, wie die Seitenanzahl eines gleichen Umfang habenden Polygons zu dem übereinstimmenden Werthe seines großen und kleinen Halbmessers.

Beweis. Die Seitenanzahl ist immer die Hälfte des Werthes der Seiten, welcher Werth dadurch bestimmt wurde, daß die halbe Seite Eins gesetzt wurde. Da nun die Größe der Seiten, d. h. das Doppelte der Seitenanzahl sich zum Doppelten des Halbmessers verhielt, wie P : D (Peripherie zum Durchmesser), so muß auch P : D sich verhalten, wie die Anzahl der Seiten zum Halbmesser.

Erklärung 1. Unter dem Halbmesser eines Polygons verstehe ich den übereinstimmenden Werth des großen und des kleinen Halbmessers, sowie das Doppelte dieses Halbmessers des Vielecks Durchmesser genannt wird.

Anmerkung 1. Der Halbmesser des Polygons ist immer gleich dem Halbmesser desjenigen Kreises, welcher mit dem Polygon gleichen Umfang hat.

Denn bei gleichem Umfange verhalten sich die Inhalte zweier regulärer Polygone zu einander, wie die Halbmesser ihrer eingeschriebenen Kreise oder wie die kleinen Halbmesser nach 5 Lehrsatz. Nun hat nur ein solcher Kreis einen gleichen Umfang mit dem Polygon, welcher zugleich mit dem eingeschriebenen, zugleich mit dem umgeschriebenen Kreise des Polygons und mit dem Polygon selber für eins gerechnet werden kann, also mit jenen dreien einen übereinstimmenden Halbmesser erhält.

18. Lehrsatz. Das Verhältniß der Seitenanzahl eines regulären Polygons zu seinem großen Halbmesser, der Hypotenuse, muß kleiner, und zu dem kleinen Halbmesser, das heißt, der Kathete, muß größer sein, als das Verhältniß der Peripherie eines Kreises zu dessen Durchmesser.

Beweis. Da der große Halbmesser eines Polygons größer, und der kleine Halbmesser kleiner ist, als der Halbmesser, so wird in der bewiesenen Proportion P : D = S A : H, d. i. Seitenanzahl zum Halbmesser die zweite Seite der Gleichung zu klein, wenn für das vierte Glied H etwas größeres, die Hypotenuse, und zu groß, wenn für das vierte Glied, den Halbmesser, etwas kleineres, die Kathete gesetzt wird.

19. Lehrsatz. Alle Polygone gleichen Umfangs haben einen gleichen oder einen und denselben Halbmesser.

Beweis. Da der Halbmesser des Polygons gleich ist dem Halbmesser des Kreises gleichen Umfangs, so müssen die Halbmesser der Polygone auch unter sich gleich sein, wenn jene gleichen Umfang haben, weil sie alle, jeder für sich, einem Dritten gleich sind, dem Halbmesser des Kreises gleichen Umfangs.

20. Lehrsatz. Der Halbmesser des Polygons kommt der Hypotenuse, dem größern Halbmesser, näher, als der Kathete, dem kleinern Halbmesser.

Beweis. Die Halbmesser, der große und der kleine eines regulären Dreiecks,

Hosted by Google

verhielten sich zu einander wie 2 : 1 nach 1 Lehrsatz. Ferner verhielt sich auch der Inhalt des regulären Dreiecks zu dem des Sechsecks wie 2 : 3 bei gleichem Umfange nach 6 Lehrsatz, also auch ihre Halbmesser wie 2 : 3. Da nun auch bei Polygonen gleichen Umfangs das Mehreck den größern kleinen Halbmesser hat, und der Kreis den größesten (Trigon. Formeln Lehrs. III), so muß auch schon das Siebeneck, wird der kleine Halbmesser des Dreiecks gleich 1 gesetzt, einen größern kleinen Halbmesser als $1\frac{1}{2}$ erhalten, mithin der Halbmesser des an Umfang gleichen Kreises noch größer sein. Weil aber der Halbmesser des Polygons gleich ist dem Halbmesser des Kreises gleichen Umfangs, so muß auch der Halbmesser des Dreiecks, dessen kleiner Halbmesser gleich 1, und dessen großer Halbmesser gleich 2 ist, größer als $1\frac{1}{2}$, also dem großen Halbmesser näher kommen, als dem kleinen.

Was hier vom regulären Dreieck bewiesen wurde, gilt allgemein. Denn wenn der kleine Halbmesser des Dreiecks gleich 1 gesetzt wird, so ist der Umfang desselben $6\sqrt{2^2 - 1^2} = 6\sqrt{3} = 10{,}392$, und dieser Ausdruck gilt für alle Polygone gleichen Umfangs. Nimmt man aber immer die halbe Seite des Polygons für die Einheit, so ist der Umfang zum Beispiel des Vierecks gleich 8, und der große Halbmesser die Hypotenuse gleich $\sqrt{2}$. Daher hat man beim Viereck $8 : \sqrt{2} = 10{,}392 : h$, folglich

$$h = \frac{1{,}4142135 \times 10{,}392}{8} = 1{,}4142135 \,.\, 1{,}299 = 1{,}837, \text{ und}$$

$8 : 1 = 10{,}392 : k$, also $k = \frac{10{,}392}{8} = 1{,}299$. Mithin ist, wenn des Dreiecks kleiner Halbmesser für die Einheit gesetzt wird, der große Halbmesser der Vierecks 1,837 und der kleine 1,299, also der Halbmesser zwischen diesen beiden.

Die Differenz des großen und des kleinen Halbmessers beträgt $1{,}837 - 1{,}299 = 0{,}538$, die halbe Differenz $\frac{0{,}538}{2} = 0{,}269$, diese zum kleinen Halbmesser addirt macht $1{,}299 + 0{,}269 = 1{,}568$, ebenfalls vom großen abgezogen $1{,}837 - 0{,}269 = 1{,}568$. Nun behaupte ich, muß der Halbmesser des Vierecks größer als 1,568 sein. Denn man hat wieder beim Achteck die Proportion $16 : 2{,}613125 = 10{,}392 : h'$, und $16 : 2{,}4142135 = 10{,}392 : k'$, also $h' = \frac{2{,}613125 \,.\, 10{,}392}{16} = 2{,}613125 \,.\, 0{,}649 = 1{,}6959$, und

$k' = 2{,}4142135 \,.\, 0{,}649 = 1{,}566824$. Also liegt auch der Halbmesser des an Umfang gleichen Vierecks zwischen 1,6959 und 1,5668. Die Differenz ist $1{,}6959 - 1{,}5668 = 0{,}1291$, die halbe 0,0645, diese zum kleinen Halbmesser addirt oder vom großen abgezogen gibt 1,6314. Mithin Halbmesser des Acht-

Hosted by Google

ecks größer als 1,566, ebenso der Halbmesser des Vierecks wie der aller Polygone gleichen Umfangs. Ferner hat man wieder beim Sechzehneck die Proportion $32 : 5{,}12583 = 10{,}392 : h''$, und $32 : 5{,}06255 = 10{,}392 : k''$, also

$h'' = \frac{5{,}12583 \,.\, 10{,}392}{32}$ oder $h'' = 5{,}12583 \,.\, 0{,}324 = 1{,}660759$ und

$k'' = 5{,}06255 \,.\, 0{,}324 = 1{,}640266$.

Also muß auch der Halbmesser aller Polygone gleichen Umfangs größer sein als 1,64. Er kommt also sowohl bei dem Achteck wie bei dem Viereck dem großen Halbmesser näher als dem kleinen.

Erklärung 2. Die Halbmesser der Polygone von doppelter, vierfacher Seitenanzahl werden von uns also bestimmt, daß die halbe Seite jedes Polygons gleich groß genommen und für die Einheit gerechnet wird; aber die Halbmesser der Polygone gleichen Umfangs daß der kleine Halbmesser des regulären Dreiecks für Eins gesetzt wird.

Erstens Halbmesser der Polygone von doppelter, vierfacher Seitenanzahl, deren halbe Seiten unter einander gleich sind und für Einheiten gerechnet:

Seitenanzahl.	Hypotenuse.	Kathete.	Halbmesser.
4	1,414213562	0,999999999	1
8	2,613125929	2,414213560	2
16	5,125830891	5,027339485	5
32	10,202297226	10,153170369	10
64	20,380016220	20,355467593	20,3
128	40,747756272	40,735485818	40,7
256	81,489376054	81,483239985	81,48
512	162,975684052	162,972615814	162,97
1024	325,949833973	325,948301727	325,94
2048	651,898900660	651,898133374	651,898
4096	1303,797417351	1303,797032730	1303,797
8192	2607,594641739	2607,594448776	2607,594
16384	5215,189186796	5215,189087707	5215,189
32768	10430,378321440	10430,378269288	10430,378

Nun ist $32768 : 10430{,}378 = 3{,}1415927 : 1$, aber

$32{,}768 : 10430{,}3783 = 3{,}1415926 : 1$ und

$32{,}768 : 10430{,}3782 = 3{,}1415926 : 1$.

Daß aber dieses Verhältniß der Seitenanzahl zur Hypotenuse, wenn man es weiter verfolgen wollte etwas zu großes, nemlich noch eine 6 hinter der 6 in 3,1415926 statt etwas zu Kleines noch weniger also als 5 geben würde,

Hosted by Google

kommt daher, daß auch diese Decimalen, welche den Werth der Hypotenuse bestimmen, im Ganzen nicht richtig sondern zu klein sind, indem sie durch die Multiplikation der Faktoren entstanden, diese aber jeder zu neun Decimalen genommen wurden. Würde man daher nur den letzten Faktor mit 10 Decimalen nehmen, so würde schon in dem Werth der Hypotenuse 10430,37832 diese letzte 2 hinter der 3 eine 6 sein müssen. Alsdann ist auch wieder

$$32768 : 10430{,}37836 < \pi : 1.$$

Diese Faktoren aber, aus welchen jene Werthe ausgerechnet sind, waren:
1,414213562 . 1,847759065 . 1,961570560 . 1,990369453 . 1,997590912 . 1,999397637 . 1,999849403 . 1,999962350 . 1,999990587 . 1,999997646 . 1,999999411 . 1,999999852 . 1,999999963 . 1,999999990.

Zweitens Halbmesser der Polygone gleichen Umfangs, wobei der keine Halbmesser des regulären Dreiecks für Eins gilt.

Seitenanzahl.	Hypotenuse.	Kathete.	Halbmesser.
4	1,837117306	1,299038104	1
8	1,697275078	1,568077703	1
16	1,664662412	1,632676390	1,6
32	1,656646607	1,648669400	1,6
64	1,654651213	1,652657991	1,65
128	1,654152753	1,653654635	1,65
256	1,654028198	1,653903651	1,65
512	1,653997061	1,653965922	1,6539
1024	1,653989276	1,653981325	1,65398
2048	1,653987329	1,653985303	1,65398
4096	1,653986842	1,6539863549	1,653986
8192	1,653986720	1,653986597	1,653986
16384	1,653986685	1,653986658	1,6539866
32768	1,653986681	1,653986673	1,6539866

Diese Hypotenusen und Katheten sind aus denen der vorigen Tabelle ausgerechnet, dadurch daß immer die Proportionen gebildet wurden

$4 : 1{,}414213562 = 3\sqrt{3} : \mathrm{h}$, und $4 : 0{,}999999999 = 3\sqrt{3} : \mathrm{k}$, ferner

$8 : 2{,}613125929 = 3\sqrt{3} : \mathrm{h}'$ und $8 : 2{,}414213562 = 3\sqrt{3} : \mathrm{k}'$.

Da der Umfang des Dreiecks und mithin aller Polygone $6\sqrt{2^2 - 1^2} = 6\sqrt{3}$ ist, so der halbe Umfang $3\sqrt{3} = 3 . 1{,}7320508075 = 5{,}1961524225$. Also ist auch $5{,}1961524225 : 1{,}6539866 = 3{,}1415926 : 1$.

21. Lehrsatz. Der Umfang für jede reguläre Figur läßt sich setzen als

Hosted by Google

gleich 10,392304845, und der Halbmesser 1,6539866, mithin der Durchmesser 3,3079733.

Beweis. Der Umfang einer jeden regulären Figur läßt sich in 3 gleiche Theile theilen, und daraus ein Dreieck beschreiben. Nun ist bei jedem regulären Dreieck der Umfang $6\sqrt{3}$ oder 10,392304845, so daß für jedes sein kleiner Halbmesser für Eins gerechnet ist, also auch der Umfang jeder regulären Figur 10,392304845. Da nun auch Polygone gleichen Umfangs denselben Halbmesser und denselben oder gleichen Durchmesser haben, so muß auch für jede reguläre Figur der Halbmesser 1,6539866 und sein Durchmesser 3,3079733 sein.

Anmerkung 2. Der Halbmesser des Kreises ist der Halbmesser für jede reguläre Figur.

Denn der Halbmesser des Polygons einer regulären Figur war nach Anmerkung 1. gleich dem Halbmesser des Kreises gleichen Umfangs. Da es nun für jeden Umfang eines Kreises auch einen gleichen Umfang eines Polygons gibt oder geben kann, so muß auch der Halbmesser des Kreises der Halbmesser für jede reguläre Figur sein.

Zusatz 1. Jeder kleine Halbmesser irgend eines Polygons muß kleiner sein als 1,6539866... und jeder große Halbmesser muß größer sein.

Denn der Halbmesser eines Polygons 1,6539866 ist größer als jeder kleine Halbmesser, und kleiner als jeder große.

Zusatz 2. Das Quadrat des Halbmessers ist ungefähr so groß, wie die Einheit vermehrt um die Wurzel von Drei, daher der Halbmesser etwas größer, sonst beinahe so viel als $\sqrt{1+\sqrt{3}}$.

Beweis. Erhebt man 1,653986, welches der Halbmesser ist, ins Quadrat, so erhält man 2,7356. Ziehet man von 3 die Wurzel aus, so hat man 1,7320, also $1+\sqrt{3}=2{,}7320$. Folglich ist 2,7356 beinahe so viel als 2,7320, und auch $\sqrt{2{,}7320}=1{,}652$, d. h. beinahe so groß als 1,653, welches der Halbmesser ist. Daher ist für 2 Decimalen, wofern man die folgenden nicht berücksichtigt, richtig gesagt $r=\sqrt{1+\sqrt{3}}$.

22. Lehrsatz. Ebenso kann man den Flächeninhalt für jedes reguläre Dreieck setzen 5,196, für ein Viereck 6,749, Achteck 8,147, Sechzehneck 8,483, Zweiunddreißigeck 8,566, Vierundsechzigeck 8,587, ein Hundertachtundzwanzigeck 8,592, für ein 256eck 8,593, ein 512eck 8,594, endlich für einen Kreis 8,5943634.

Beweis. Da der Umfang des regulären Dreiecks wie der aller Polygone und des Kreises $6\sqrt{3}=10{,}3923048$ beträgt, so ist beim Dreieck, dessen kleiner Halbmesser für die Einheit gesetzt wird, der Inhalt

Hosted by Google

$\frac{6\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{3}{2} = 3 \cdot \sqrt{3} = 5{,}1961524$. Ebenso muß die Fläche eines Quadrats gleichen Umfangs mit dem Dreieck sein

$$6\sqrt{3} \cdot \frac{1{,}2990381}{2} = \frac{10{,}3923048 \times 1{,}2990381}{2} = 6{,}7499994.$$

Für das Achteck, dessen kleiner Halbmesser 1,5680777 ist, muß der Inhalt sein

$$10{,}3923048 \times \frac{1{,}5680777}{2} = 5{,}1961524 \times 1{,}5680777 = 8{,}1479707.$$

Die Fläche des 16ecks $= 5{,}1961524 \times 1{,}6326763 = 8{,}4836348.$
Für das 32eck hat man $= 5{,}1961524 \times 1{,}6486694 = 8{,}5667414.$
Das 64eck ist an Inhalt $= 5{,}1961524 \times 1{,}6526579 = 8{,}5874632.$
Ein 128eck an Inhalt $= 5{,}1961524 \times 1{,}6536546 = 8{,}5926413.$
Das 256eck ist an Inhalt $= 5{,}1961524 \times 1{,}6539036 = 8{,}5939371.$
Der Inhalt des 512ecks $= 5{,}1961524 \times 1{,}6539659 = 8{,}5942588,$
endlich ist der Kreis $10{,}3923048 \times 0{,}8269933 = 8{,}5943634.$

Zusatz. Für das reguläre Sechseck, dessen großer Halbmesser gleich der Seite ist, gleich $\frac{6\sqrt{3}}{6} = = \sqrt{3}$, hat man für den kleinen Halbmesser $=$

$$= \sqrt{(\sqrt{3})^2 - (\tfrac{1}{2}\sqrt{3})^2} = \sqrt{3 - \tfrac{1}{4} \cdot 3} = \sqrt{3 - \tfrac{3}{4}} =$$

$$= \sqrt{\frac{12-3}{4}} = \sqrt{\tfrac{9}{4}} = \tfrac{3}{2} = 1{,}5.$$

Daher ist der Inhalt eines regulären Sechsecks $= 3\sqrt{3} \cdot 1{,}5 =$ $= 5{,}1961524 \times 1{,}5 = 7{,}7942286$. Vergleicht man diesen Werth mit dem Inhalt der früher angeführten Polygone, so wird man finden, daß die Differenz zwischen Dreieck und Sechseck $7{,}7942286 - 5{,}1961524 = 2{,}5980762$ beträgt, während der Unterschied des Sechsecks und des Kreises $8{,}5943634 - 7{,}7942286 =$ $= 0{,}8001348$ ausmacht. Die Zunahme vom Dreieck zum Sechseck ist daher nicht nur größer als die vom Sechseck zum Kreise, sondern auch mehr als dreimal größer. Denn $2{,}59 : 0{,}80 > 3 : 1$.

Erklärung 3. Vergleicht man die ausgerechneten Wurzelfaktoren, deren Produkt die Größe der Hypotenuse oder des großen Halbmessers ausmacht, mit einer solchen Tabelle, worin die immer mehr mit einander übereinstimmenden Hypotenusen und Katheten angegeben sind, so wird man finden, daß diese Uebereinstimmung fast regelmäßig in so vielen Zahlen erfolgt, als der gehörende Faktor mit der ganzen Zahl Eins noch Neune enthält. Z. B. der fünfte Faktor 1,9975909 enthält 2 Neune nach der ganzen Zahl 1; die Uebereinstimmung der Hypotenuse und der Kathete muß daher in den 3 ersten Ziffern bestehen.

Hosted by Google

Also da die fünfte Hypotenuse der ersten Tafel die des 64ecks, 20,380016220, und die Kathete 20,355467593 ist, so ist der mit beiden übereinstimmende Halbmesser 20,3 bis auf 3 Ziffern richtig. Ebenso der fünfte Halbmesser der zweiten Tafel 1,65. Ferner heißt der achte Faktor 1,9999623. Die Uebereinstimmung in fünf Zahlen ist bei der ersten Tafel des 512ecks 162,97, und bei der zweiten 1,6539. Nur zuweilen geschieht es, daß diese Uebereinstimmung der Hypotenuse sich noch verzögert, und daher aus einer Zahl weniger besteht, als die angegebenen Zahlen des Faktors betragen. So zum Beispiel hat schon der vierte Faktor 1,9903694 drei gehörende Zahlen, während die Uebereinstimmung der ersten Tafel beim 32eck 10, und der zweiten 1,6 jede in zwei Ziffern erfolgt. So heißt der siebente Faktor 1,9998494 und die Uebereinstimmung der ersten Tafel beim 256eck geschieht auch in vier Ziffern, nemlich 81,48, aber in der zweiten Tafel erhält man nur erst drei, nemlich 1,65.

Da die Hypotenuse ein Produkt der Wurzelfaktoren ist, dieses Produkt aber sich immer aus dem letzten Faktor ausrechnen läßt, wenn derselbe aus den weitern Zahlen nach den Neunen angegeben wird, indem $h = \frac{1}{\sqrt{1 - {}^1/_4 f^2}}$, woselbst f den letzten Wurzelfaktor und h die Hypotenuse bedeutet, so wird man auch hier, um die Hypotenuse nur so weit zu erhalten, als sie mit der Kathete übereinstimmt, auch f so groß nehmen müssen, da die Neune des Faktors keine Zahl einbringen, daß der Faktor aus noch so vielen Decimalzahlen besteht, als darinnen Neune vorhanden sind. Ein Beispiel wird dieses deutlicher machen. Das Produkt der fünf ersten Faktoren oder die fünfte Hypotenuse ist 20,380016220. Dieses aus dem letzten Faktor 1,9975909 ausgerechnet ist $h = \frac{1}{\sqrt{1 - {}^1/_4 . 1{,}9975909^2}} =$

$$= \frac{1}{\sqrt{1{,}998795456 \times 0{,}001204544}} = \frac{1}{\sqrt{0{,}002407637}} = \frac{1}{0{,}0490676} =$$

$= 20{,}38001$. Da nemlich die Neune im Wurzelfaktor, wenn die Potenzerhebung vollzogen und die Subtraction geschehen, ebenso viele Nullen zurücklassen, so gehören zur Bestimmung der Uebereinkunft der Hypotenuse mit der Kathete noch eben so viele Zahlen, als der Faktor Neune enthält. Also h und k Hypotenuse und Kathete, d. h. Halbmesser gleich

$$\frac{1}{\sqrt{1 - {}^1/_4 . 1{,}9975^2}} = \frac{1}{\sqrt{1{,}9987 \times 0{,}0012}} = \frac{1}{\sqrt{0{,}00239844}} = \frac{1}{0{,}0489} = 20{,}4,$$

welches auch so etwas zu viel einbringt, indem die 4 nur eine 3 sein müßte. Einen solchen begrenzten Wurzelfaktor, wodurch nur die Uebereinstimmung der Hypotenuse und der Kathete erhalten wird, nennen wir daher einen Wurzelfaktor

Hosted by Google

des Halbmessers, während ein unbegrenzter der Wurzelfaktor der Hypotenuse heißt. Solche Wurzelfaktoren des Halbmessers wären daher nach tabellarischer Ordnung folgende:

1) 1,4
2) 1,8
3) 1,96
4) 1,9903
5) 1,9975
6) 1,999397
7) 1,999849
8) 1,99996235
9) 1,9999905876
10) 1,9999976469
11) 1,999999411725
12) 1,999999852931
13) 1,99999996323285
14) 1,9999999908082146
15) 1,9999999977020536
16) 1,99999999425513413
17) 1,99999999856378353
18) 1,99999999996409458835
19) 1,999999999910236470886
20) 1,999999999977559117722
21) 1,9999999999994389779 43038
22) 1,99999999999859744485759
23) 1,99999999999996493612143990
24) 1,99999999999999912340303599750
25) 1,99999999999999978085075899937
26) 1,99999999999999945212689749 8440
27) 1,99999999999999986303172437 4610
28) 1,99999999999999996575793109365254
29) 1,99999999999999999914394827734131372
30) 1,99999999999999999785987069335328 43
31) 1,99999999999999999946496767333832 1076
32) 1,99999999999999999986624191833458 0269
33) 1,99999999999999999996656047958364506725
34) 1,99999999999999999999164011989591126681 30.

Hosted by Google

Wenn daher F den letzten Wurzelfaktor des Halbmessers oder des Radius, der Uebereinstimmung zwischen Hypotenuse und Kathete bezeichnet, so ist

$$r = \frac{1}{\sqrt{1 - {}^1/_4 F^2}}.$$

23. Lehrsatz. Die Peripherie eines Kreises verhält sich zu ihrem Durchmesser, wie eine nte Potenz von 2 zu dem Produkte von n — 1 Wurzelfaktoren, sofern sie begrenzt sind, das heißt also zu dem n — 1ten Halbmesser.

$$\pi : 1 = 2.2.2.2.2 : \sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$$

Beweis. Da die halbe Seite des Polygons für 1 gesetzt wird, so ist der Umfang gleich der doppelten Seitenanzahl, gleich 2.2^{n+1}. So ist der Umfang des Vierecks $= 2.2^{1+1} = 2.2^2 = 2.4 = 8$, der Umfang des Achtecks $2.2^{2+1} = 2.2^3 = 2.8 = 16$. Da nun die nte Potenz von 2 den Umfang des n—1ten Polygons bezeichnet, so bedeutet auch die nte Potenz von 2 den halben Umfang oder die Seitenanzahl des n—1ten Polygons. Der halbe Umfang oder die Seitenanzahl des Polygons wird daher immer mit so vielen Faktoren von 2 angegeben, als der Halbmesser mit Wurzelfaktoren weniger Einem. Es verhält sich also die Peripherie eines Kreises zu ihrem Durchmesser wie 5 Potenzfaktoren zu dem Produkte von 4 Wurzelfaktoren der Zahl 2, und wieder wie das Produkt von 6 Potenzfaktoren zu dem von 5 Wurzelfaktoren. Daher hat man auch allgemein:

$$\pi = \frac{2.2.2.2.2 \text{ etc.}}{\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} \text{ etc.}}$$

24. Lehrsatz. Es ist $\pi = 2^n \sqrt{1 - {}^1/_4 F^2}$, wenn F den n — 1ten Wurzelfaktor des Halbmessers bedeutet.

Beweis. Nach dem vorigen Lehrsatze ist

$$\pi = \frac{2.2.2.2.2 \text{ etc.}}{\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} \text{ etc.},}$$

oder auch $\pi = \frac{2^n}{r} = \frac{2^n}{\frac{1}{\sqrt{1 - {}^1/_4 F^2}}} = 2^n \sqrt{1 - {}^1/_4 F^2}$, oder auch

$$\pi = 2^n \sqrt{(1 + {}^1/_2 F)(1 - {}^1/_2 F)}.$$

Hosted by Google

Wenn man nun aus dem 34. Wurzelfaktor des Halbmessers, welcher in den Decimalen außer 20 Neunen noch 20 andere Zahlen enthält, π berechnen wollte, so würde man die 20. Decimalstelle nicht richtig erhalten, und es stimmen auch wirklich die 34. Hypotenuse und die 34. Kathete in der 20. Decimalstelle nicht mehr überein. Dieses läßt sich leicht vermuthen, da nach den 20 Neunen des Wurzelfaktors eine minderwerthige Zahl zunächst folgt, nemlich 1. Der 34. Wurzelfaktor der Hypotenuse, also der unbegrenzte, ist nemlich:

$f = 1{,}99999999999999999991640119895911266813087363429 94$, und

$\frac{1}{2} f = 0{,}99999999999999999999582005994795563340654368171497$,

die 34. Hypotenuse oder

$$h = \frac{1}{\sqrt{(1+\frac{1}{2}f)(1-\frac{1}{2}f)}} = \frac{1}{0{,}00000000009143237995419748006 5}$$

und die 34. Kathete

$$k = \frac{0{,}99999999999999999999582005994795563340 6\ldots}{0{,}00000000009143237995419748006 5}$$

Da nun $\pi > \frac{2^n}{h}$ und $\pi < \frac{2^n}{k}$, und hier $n=35$, also $2^n = 34359738368$, so ist $\pi > 34359738368 \times 0{,}00000000009143237995419748006 5$, und

$\pi < \frac{34359738368 \times 0{,}00000000009143237995419748006 5}{0{,}99999999999999999999582005994795563340 6\ldots}$, d. i.

$\pi > 3{,}1415926535897932384582$ und

$\pi < 3{,}1415926535897932384718$.

Um also die 20. Decimalstelle von π zu erhalten, hat man weiter die 35. Hypotenuse und die 35. Kathete zu berechnen.

Der 35. Wurzelfaktor der Hypothenuse ist:

$f = 1{,}99999999999999999999791002997397781670327074886380$, und

$\frac{1}{2} f = 0{,}99999999999999999999895501498698890835163537443190$;

die 35. Hypotenuse $= \frac{1}{0{,}00000000004571618997709874003294}$

und die 35. Kathete $= \frac{0{,}99999999999999999999895501498698890\ldots}{0{,}00000000004571618997709874003274}$

ferner ist $n = 36$ in dem Ausdruck $2^n = 2^{36} = 68719476736$. Daher ist nun

$68719476736 \times 0{,}00000000004571618997709874003294 < \pi$ oder

$\pi > 3{,}1415926535897932384609 7$, und

$\frac{3{,}1415926535897932384609 7}{0{,}99999999999999999999895501498\ldots} > \pi$, oder

$\pi < 3{,}1415926535897932384642 5$.

Hosted by Google

Vermittelst der 35. Hypotenuse und der 35. Kathete läßt sich also π bis auf die 20. Decimalstelle berechnen, denn nach beiden hat man übereinstimmend

$$\pi = 3{,}14159265358979323846,$$

welches die sogenannte Ludolffsche Zahl ist.

25. Lehrsatz. Des Zirkels Viereck.

Die Fläche eines Kreises ist immer gleich einem Rechteck, dessen Grundlinie 2^{n-2} ist, die Höhe aber $\sqrt{1 - {}^1/_4 F^2}$, oder es ist $\pi r^2 = 2^{n-2}\sqrt{1 - {}^1/_4 F^2}$.

Beweis. Da π die Peripherie eines solchen Kreises ist, dessen Durchmesser gleich 1 gesetzt wird, so ist also $\pi r^2 = 3{,}1415\ldots \times ({}^1/_2)^2$. Auch ist $3{,}1415\ldots = 2^n\sqrt{1 - {}^1/_4 F^2}$. Mithin ist auch die Fläche des Kreises gleich ${}^1/_4 \times 2^n\sqrt{1 - {}^1/_4 F^2}$, oder der Inhalt des Kreises $\frac{2^n}{2^2}\sqrt{1 - {}^1/_4 F^2} =$ $= 2^{n-2}\sqrt{1 - {}^1/_4 F^2}$. Ist daher F der nte Faktor, so wird der Kreis $\pi r^2 = 2^{n-1}\sqrt{1 - {}^1/_4 F^2}$, so wie auch dann im vorigen Lehrsatze $\pi = 2^{n+1}\sqrt{1 - {}^1/_4 F^2}$.

Hosted by Google

Hosted by Google

V.

Trigonometrisches.

Von den Abschnitten der trigonometrischen Linien und namentlich der Tangente.

Aus den Jahren 1844 und 1845.

Hosted by Google

Hosted by Google

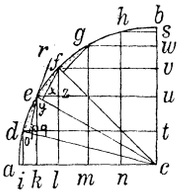
I. Der Winkel von 90^0 ist gleich einem rechten, der Bogen von 90^0 gleich einem Quadranten, der Sinus von 90^0 gleich dem Halbmesser oder gleich Eins. Aber für Bogen, welche $> o$ und $< Q$ sind, und für Winkel $> o$ und $< R$, in Vergleich der Sinusse, welche $> o$ und $< r$ oder < 1 sind, gilt das Gesetz:

Der wievielte Theil ein Bogen zu seinem Quadranten ist, oder der wievielte Theil der Winkel zu einem rechten, ein noch größerer Theil muß der dazu gehörende Sinus zu dem Halbmesser oder der Einheit sein: umgekehrt

Der wievielte Theil ein Sinus zu dem Halbmesser, der Einheit ist, ein noch viel kleinerer Theil muß der dazu gehörende Bogen zu einem Quadranten und der Winkel zu einem rechten sein. (Siehe Fig. 1.)

Beweis. Ist der Quadrant ab in n z. B. in 6 gleiche Theile getheilt ad, de, ef, fg, gh, hb, so soll bewiesen werden, daß $\sin ad$ oder di größer als $1/n$ größer als $1/6$, der $\sin ae = ek$ größer als $2/6$, der $\sin af = fl = vc$ größer als $3/6$, der $\sin ag = gm = wc$ größer als $4/6$, der $\sin ah = hn = sc$ größer als $5/6$ sei.

Fig. 1.



Es ist Bogen ed = Bogen ad, also $eo = di = \sin ad = \sin 1/n\,Q$. Aber es ist $di = tc$, und $eo > ep$, daher auch $eo > eq$, oder $eo > ut$, $\sin 1/n\,Q > ut$. Ebenso da auch $fy = \sin ad$ größer als fx größer als fz größer als vu ist, so immer $\sin 1/n\,Q$ nur gleich tc, sonst größer als jedes andere abgeschnittene Stück des Halbmessers bc, und da es dieser Stücke n geben muß, auch $tc > 1/n\,bc$. Also muß der $\sin ad$ größer als $1/n$ sein, wenn der Bogen $ad = 1/n$ ist.

Um nun zu beweisen, daß auch jeder folgende Theil von bc, wie tu zum vorhergehenden tc zusammengenommen, also $uc > 2/n$ u. s. w., sehe man darauf, wie sich die einzelnen Abschnitte selbst ct, tu, uv, vw, ws und sb zu einander verhalten. Es wird sich aber beweisen lassen, daß $ct > tu$, $tu > uv$ und so fort sei, also die Größe der einzelnen Abschnitte immer abnimmt. Zuerst ist schon bewiesen, daß $ct > tu$, weil auch ct größer als jeder Abschnitt war. Daß aber auch $tu > uv$, ergibt sich aus Folgendem. Es ist Bogen fe = Bogen ed, also auch Sehne fe = Sehne ed. Es muß aber $< fez$ kleiner sein als $< edq$, weil $< rez = < edq$, mithin $< efz$ größer als

Hosted by Google

$<$ d e q. Wenn also über e f als Durchmesser ein Halbkreis beschrieben würde, so fällt die hineingetragene f z, weil e f z $>$ d e q auch zunächst an den Kreis und näher als e q, also muß f z $<$ e q sein, daher v u $<$ u t. Aehnlicherweise wird also gezeigt, daß w v $<$ v u sei, und so fort. Die Abschnitte des Halbmessers nehmen also immer mehr ab bei gleichgetheilten Bogenstücken zu einem Quadranten. Da nun immer die untern Stückchen die größten sind, so muß auch, wenn der Stücke n sind, nicht nur t c $>$ $^1/_n$, sondern auch u c $>$ $^2/_n$ sein, v c $>$ $^3/_n$, w c $>$ $^4/_n$, s c $>$ $^5/_n$. Nemlich u c $>$ $^2/_n$, weil u c $>$ 2 u v, u c $>$ u w, aber wieder v w $>$ w s, w s $>$ s b, also v w $>$ s b, und da u v $>$ v w, auch u v $>$ w s, also u w $>$ w b, daher auch u c $>$ $\frac{\text{u w} + \text{w b}}{2}$, u c $>$ $^1/_3$ b c, u c $>$ $^2/_n$ u. s. w. Es ist aber t c $=$ sin a d $=$ sin A; u c $=$ sin 2 a d $=$ $=$ sin 2 A, v c $=$ sin 3 a d $=$ sin 3 A, w c $=$ sin 4 a d $=$ sin 4 A; s c $=$ sin 5 a d $=$ sin 5 A, b c $=$ sin 6 a d $=$ sin 6 A. Mithin hat man wenn Bogen a d $=$ $^1/_6$ Q ist, sin A $>$ $^1/_6$, sin 2 A $>$ $^2/_6$, sin 3 A $>$ $^3/_6$, sin 4 A $>$ $^4/_6$, sin 5 A $>$ $^5/_6$.

Ist daher der sin a d $=$ d i vom Halbmesser b c ein bestimmter Theil $^1/_m$, so muß der Bogen, der dazu gehört, a d $<$ $^1/_m$ sein. Denn wäre der Bogen gleich oder größer als $^1/_m$, so müßte gegen die Voraussetzung der sin a d noch größer als $^1/_m$ sein.

Zusatz 1. Die aus den Theilungspunkten eines in gleiche Abschnitte getheilten Quadranten mit dem einen Halbmesser gezogenen Parallelen theilen den andern Halbmesser in eben so viele Abschnitte, die einander ungleich sind, und sich so zu einander verhalten, daß jede folgende Parallele ein kleineres Stück immer abschneidet, als die zunächst vorhergehende.

Zusatz 2. Es ist sin 2 A $<$ 2 sin A, und sin 3 A $<$ 3 sin A.

Beweis. e k $<$ 2 d i, weil t c $>$ t u, also 2 t c $>$ u c, ebenso v c $<$ 3 t c. Auch läßt sich das erstere beweisen aus der Formel sin 2 A $=$ 2 sin A . cos A. Weil nun A weder gleich 0 noch gleich 1 sein soll, so ist cos A immer ein ächter Bruch, daher 2 sin A multiplicirt mit einem ächten Bruch kleiner als 2 sin A.

Zusatz 3. Die Rechtecke, welche die Sinusse und Cosinusse mit den Halbmessern bilden, sind um so größer, je ähnlicher und gleicher einander Sinus und Cosinus sind, und um so kleiner, je mehr von einander verschieden. Daher ist das Rechteck des sin 45° und cos 45°, welches zugleich das einzige Quadrat ist, das größeste.

Beweis. Zuerst ist das Rechteck i d t c $<$ k e u c. Denn beide haben das Rechteck k q t c mit einander gemein, und das Rechteck i d q k ist kleiner als q e u t, denn q k $<$ q t, q k $<$ k c, weil noch e k $<$ k c, die Sinusse unter

Hosted by Google

45^0 kleiner als die Cosinusse. Ferner ist $dq < eq$, weil $< deq$ kleiner sein muß als $< edq$. Denn der ganze Winkel dec als Winkel eines gleichschenkeligen Dreiecks ist kleiner als ein rechter, und $< qec = 60^0$, also $< deq$ noch kleiner als 30^0, folglich $< edq$ größer noch als 60^0, daher auch $dq < eq$. Mithin hat man $id \times dq < qt \times eq$, oder $idqk < eqtu$, also $idtc < keuc$.

Zweitens ist das Rechteck $keuc < lfvc$. Denn es ist $ke < lf$, weil $ke = lz$, und $lz < lf$. Dann ist $ez < zf$, dann $< efc$ kleiner als R, und $< zfc = 45^0$, daher $< efz$ kleiner als 45^0, mithin $< fez$ größer als 45^0, also $fz > ez$, folglich auch Rechteck $ez \times zl < fz \times fl$, oder $ez \times zl < fz \times fv$, denn $fl = fv = lc$, weil $< lcf = 45^0$ ist. Da nun zu beiden das Rechteck $lzuc$ hinzukommt, so ist auch $keuc < lfvc$.

Das Rechteck $lfvc$, in welchem $lf = lc$, also welches ein Quadrat ist, wird daher das größeste. Denn auch $lfvc > mgwc$, und $lfvc$ größer als jedes der folgenden Rechtecke nach 45^0, weil diese Rechtecke immer gleich sind denen von 45^0, z. B. $gmcw = keuc$, weil gm der Sinus eines Bogens gleich dem Cosinus seines Complements, also gleich dem Cosinus von gb, oder dem Cosinus von ae, das ist gleich kc ist, und weil der Cosinus gw = sinus complementi $= ek$ ist, daher $gmcw = keuc$, ebenso also $hncs = idtc$.

Zusatz 4. Von den durch die Parallelen entstandenen Abschnitten ist

$$tc = \tfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}};\quad ut = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}};\quad uv = \tfrac{1}{2}\sqrt{2} - \tfrac{1}{2};$$

$$vw = \tfrac{1}{2}\sqrt{3} - \tfrac{1}{2}\sqrt{2};\quad ws = \tfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}} - \tfrac{1}{2}\sqrt{3};$$

$$sb = 1 - \tfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}.$$

$$1 = \tfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}} + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}} + \tfrac{1}{2}\sqrt{2} - \tfrac{1}{2} +$$

$$+ \tfrac{1}{2}\sqrt{3} - \tfrac{1}{2}\sqrt{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}} - \tfrac{1}{2}\sqrt{3} + 1 -$$

$$- \tfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}.$$

Beweis. Da der $\sin \tfrac{1}{2}a = \sqrt{\frac{1-\cos a}{2}}$, so ist auch $di =$

$$= \sqrt{\frac{1-kc}{2}} = \sqrt{\frac{1-\sqrt{1^2-\frac{1}{4}}}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{1}{2}\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}} =$$

$$= \tfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}} = tc.\quad \text{Also } ut = uc - tc = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}.$$

Hosted by Google

Weil $2\,v\,c^2 = 1$, so ist $v\,c = \sqrt{1/2} = 1/2\sqrt{2}$, also $u\,v = 1/2\sqrt{2} - 1/2$. Ebenso ist $v\,w = w\,c - v\,c = 1/2\sqrt{3} - 1/2\sqrt{2}$. Ferner $w\,s = s\,c - w\,c =$

$= i\,c - w\,c = \cos a\,d - w\,c = \dfrac{\sin 2\,a\,d}{2\sin a\,d} - 1/2\sqrt{3} = \dfrac{1/2}{\sqrt{2-\sqrt{3}}} -$

$- 1/2\sqrt{3} = 1/2\sqrt{2+\sqrt{3}} - 1/2\sqrt{3}$. Endlich muß auch sein $s\,b =$

$= b\,c - s\,c = b\,c - i\,c = 1 - 1/2\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

Also ist $t\,c = 1/2\sqrt{2-1{,}7320508} = 1/2\sqrt{0{,}2679492} = 1/2\,.\,0{,}5176380 =$
$= 0{,}2588190$; $u\,t = 0{,}5 - 0{,}2588190 = 0{,}2411809$;

$u\,v = 0{,}7071067 - 0{,}5 = 0{,}2071067$; $v\,w = 0{,}8660254 - 0{,}7071067 =$
$= 0{,}1589187$;

$w\,s = 0{,}9659259 - 0{,}8660254 = 0{,}0999005$; $s\,b = 1 - 0{,}9659259 =$
$= 0{,}034070$.

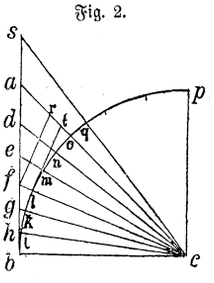
$t\,c + u\,t + u\,v + v\,w + w\,s + s\,b = 0{,}999999\,.\,. = 1$.

II. Der Winkel von 45^0 ist gleich einem halben rechten, und der Bogen von 45^0 gleich einem halben Quadranten, die Tangente von 45^0 gleich dem Halbmesser oder der Einheit. Aber für Bogen, welche > 0, und $< 1/2\,Q$ sind, und für Winkel > 0 und $< R$ in Vergleich der Tangenten, welche > 0 und kleiner als der Halbmesser $< r$ oder < 1 sind, gilt das Gesetz:

a. Der wievielte Theil ein Bogen zu seinem halben Quadranten ist, oder der Winkel zu einem halben rechten, ein noch viel kleinerer Theil muß die dazu gehörende Tangente zu dem Halbmesser, der Einheit sein; umgekehrt

Der wievielte Theil eine Tangente zu dem Halbmesser, der Einheit ist, ein noch größerer Theil muß der dazu gehörende Bogen zu einem halben Quadranten und der Winkel zu einem halben rechten sein.

Fig. 2.



Beweis. Der halbe Quadrant $b\,o$ sei in n, hier in 6 gleiche Theile getheilt $b\,i$, $i\,k$, $k\,l$, $l\,m$, $m\,n$, $n\,o$, dann durch die Theilungspunkte die Secanten gezogen, $c\,h$, $c\,g$, $c\,f$, $c\,e$, $c\,d$, $c\,a$. Nun muß $\tan h\,b < 1/6$, $g\,b < 2/6$, $f\,b < 3/6$, $e\,b < 4/6$, $d\,b < 5/6$ sein. Zuerst ist jede weitere Secante immer größer als die zunächst vorhergehende, und $h\,c > b\,c$, die erste also auch größer als Halbmesser, und $g\,c > h\,c$, weil $< g\,h\,c$ ein stumpfer Winkel als Außenwinkel, aber $< h\,g\,c$ ein spitzer. Ebenso $f\,c > g\,c$, $e\,c > f\,c$ und so weiter. Nun hat man immer ein Dreieck wie $g\,c\,b$, bei welchem der Winkel an der Spitze halbirt ist. Verlängerte man an demselben die

Hosted by Google

Seite gc über c, bis sie gleich würde bc in der Verlängerung, zöge dann aus b nach dem Endpunkte eine Linie, so würde auch der Winkel, der entstanden gleich sein $^1/_2\,gcb = hcb$, also die Linie parallel werden hc. Daher $gh:hb = gc:$ der verlängerten über gc, oder $gh:hb = gc:cb$. Da nun $gc > cb$, so auch $gh > hb$. Ebenso ist $fc:ch = fg:gh$, also da $fc > ch$, auch $fg > gh$; ebenfalls $ef > fg$; $de > ef$; $ad > de$. Mithin da hb das kleinste abgeschnittene Stück der Tangente, auch $hb < {}^1/_6$, ebenso $gb = gh + hb$, die zwei kleinsten Stücke aller Stücke, da es deren n gäbe, auch $gb < {}^2/_n$; ebenso $fb < {}^3/_n$, oder $gb < {}^2/_6$, $fb < {}^3/_6$, $eb < {}^4/_6$, $db < {}^5/_6$.

Wenn daher die Tangente hb, das kleinste Stück der ganzen Tangente ab, oder auch nur ein bestimmter Theil derselben, gleich $^1/_m$ wäre, so muß der Bogen $bi > {}^1/_m$ sein. Denn wäre der Bogen bi gleich oder kleiner als $^1/_m$, so müßte gegen die Voraussetzung die Tangente hb noch kleiner als $^1/_m$ sein.

Anderer Beweis. Nemlich eine Tangente lt auf cl, welche ac schneiden muß in t, ist kleiner als eine Parallele fr mit der Tangente, wo r der Durchschnittspunkt mit ac, und diese Parallele ist kleiner als fa. Daher $lt < fa$, oder $bf < fa$.

Zusatz 1. Die durch die Theilungspunkte eines in gleiche Abschnitte getheilten halben Quadranten von dem Mittelpunkte aus gezogenen Linien theilen verlängert die Tangente in ebenso viele Abschnitte, die einander ungleich sind, und sich so zu einander verhalten, daß jeder folgende Abschnitt größer ist, als der zunächst vorhergehende.

Zusatz 2. Es ist $\tan 2A > 2\tan A$; $\tan 3A > 3\tan A$; $\tan 4A > > 4\tan A$.

Beweis. $gb > 2hb$, weil $hb < gh$, also $2hb < hb + gh$, oder $2hb < gb$; ebenso $fb > 3hb$, $eb > 4hb$.

Zusatz 3. Von den durch die Secanten entstandenen Abschnitten der Tangente ist $bh = 2\sqrt{2+\sqrt{3}} - 2 - \sqrt{3}$; $hg = 2\left(2 - \sqrt{2+\sqrt{3}}\right)$; $gf = \sqrt{3} + \sqrt{2} - 3$; $fe = 1 - \sqrt{2} + {}^1/_3\sqrt{3}$; $ed = \sqrt{2}\sqrt{3} + + {}^2/_3\sqrt{3} - \sqrt{2} - 2$; $da = 3 + \sqrt{2} - \sqrt{3}(\sqrt{2}+1)$.

Beweis. Es ist $bh = \dfrac{\sin bi}{\cos bi} = \dfrac{\sqrt{\frac{1-\cos bk}{2}}}{\sqrt{\frac{1+\cos bk}{2}}} = \sqrt{\dfrac{1-\cos 15^0}{1+\cos 15^0}} =$

Hosted by Google

$$= \sqrt{\frac{1 - \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}}{1 + \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}}} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2+\sqrt{3}}}{2 + \sqrt{2+\sqrt{3}}}} =$$

$$= \sqrt{\frac{(2 - \sqrt{2+\sqrt{3}})^2}{4 - (2+\sqrt{3})}} = \frac{2 - \sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{2-\sqrt{3}}} =$$

$$= \frac{(2 - \sqrt{2+\sqrt{3}})(\sqrt{2+\sqrt{3}})}{\sqrt{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}} = 2\sqrt{2+\sqrt{3}} - (2+\sqrt{3}) =$$

$$= 2\sqrt{2+\sqrt{3}} - 2 - \sqrt{3}.$$

$$hg = bg - bh = \frac{\sin bk}{\cos bk} - bh = \frac{\sin 15^0}{\cos 15^0} - bh = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}} -$$

$$- (2\sqrt{2+\sqrt{3}} - 2 - \sqrt{3}) = 2 - \sqrt{3} - 2\sqrt{2+\sqrt{3}} +$$

$$+ 2 + \sqrt{3} = 2(2 - \sqrt{2+\sqrt{3}}).$$

$$gf = bf - bg = \frac{\sin 22\frac{1}{2}^0}{\cos 22\frac{1}{2}^0} - \frac{\sin 15^0}{\cos 15^0} = \frac{\sqrt{1-\cos 45^0}}{\sqrt{1+\cos 45^0}} - \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}} =$$

$$= \sqrt{\frac{1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}}{1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}}} - (2\sqrt{3}) = \frac{1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}}{\sqrt{1 - \frac{1}{4}\cdot 2}} - 2 + \sqrt{3} = \frac{2}{\sqrt{2}} - 1 -$$

$$- 2 + \sqrt{3} = \sqrt{3} + \sqrt{2} - 3.$$

$$fe = be - bf = \frac{\sin 30^0}{\cos 30^0} - \frac{\sin 22\frac{1}{2}^0}{\cos 22\frac{1}{2}^0} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} - \frac{2 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} - (\sqrt{4/2} - 1) = 1 - \sqrt{2} + \frac{1}{3}\sqrt{3}.$$

$$ed = \frac{ad \times ec}{ac} = \frac{(ae - ed)ec}{ac} = \frac{(1 - eb - ed)ec}{ac} =$$

Hosted by Google

$$= \frac{(1 - \frac{1}{3}\sqrt{3} - \mathrm{ed})\sqrt{1 + (\sqrt{\frac{1}{3}})^2}}{\sqrt{2}} = \frac{(1 - \frac{1}{3}\sqrt{3} - \mathrm{ed})\sqrt{\frac{4}{3}}}{\sqrt{2}} =$$

$$= (1 - \tfrac{1}{3}\sqrt{3} - \mathrm{ed})\tfrac{1}{3}\sqrt{6} = \tfrac{1}{3}\sqrt{2}\sqrt{3} - \tfrac{1}{3}\sqrt{2} - \tfrac{1}{3}\sqrt{2}\sqrt{3}.\mathrm{ed}.$$

Also $\mathrm{ed}(1 + \frac{1}{3}\sqrt{2}\sqrt{3}) = \frac{1}{3}\sqrt{2}\sqrt{3} - \frac{1}{3}\sqrt{2}$. Daher $\mathrm{ed} =$

$$= \frac{\frac{1}{3}\sqrt{2}\sqrt{3} - \frac{1}{3}\sqrt{2}}{1 + \frac{1}{3}\sqrt{2}\sqrt{3}} = \frac{(\frac{1}{3}\sqrt{2}\sqrt{3} - \frac{1}{3}\sqrt{2})(1 - \frac{1}{3}\sqrt{2}\sqrt{3}}{1 - \frac{2}{3}} =$$

$$= (\tfrac{1}{3}\sqrt{2}\sqrt{3} - \tfrac{1}{3}\sqrt{2})(3 - \sqrt{2}\sqrt{3}) = \sqrt{2}\sqrt{3} - \sqrt{2} - 2 + \tfrac{2}{3}\sqrt{3}.$$

Endlich ist $\mathrm{da} = \mathrm{ae} - \mathrm{ed} = 1 - \frac{1}{3}\sqrt{3} - (\sqrt{2}\sqrt{3} - \sqrt{2} - 2 + \frac{2}{3}\sqrt{3}) =$

$$= 3 + \sqrt{2} - \sqrt{2}\sqrt{3} - \sqrt{3}.$$

Also ist $\mathrm{bh} = 2\sqrt{3{,}7320508} - 2 - 1{,}7320508 =$

$= 2 . 1{,}9318516 - 3{,}7320508 = 3{,}8637033 - 3{,}7320508 = 0{,}1316525.$

$\mathrm{hg} = 4 - 3{,}8637033 = 0{,}1362966$; $\mathrm{gf} = 1{,}7320508 + 1{,}4142135 - 3 =$

$= 0{,}1462643$; $\mathrm{fe} = 1 - 1{,}4142135 + 0{,}5773502 = 0{,}1631367$; $\mathrm{ed} =$

$= 2{,}4494896 + 1{,}1547004 - 1{,}4142135 - 2 = 3{,}6041900 - 3{,}4142135 =$

$= 0{,}1899765$; $\mathrm{ad} = 3 + 1{,}4142135 - 2{,}4494896 - 1{,}7320508 =$

$= 4{,}4142135 - 4{,}1815404 = 0{,}2326731.$

$\mathrm{bh} + \mathrm{hg} + \mathrm{gf} + \mathrm{fe} + \mathrm{ed} + \mathrm{da} = 0{,}999999\ldots = 1.$

Zusatz 4. Von den sechs durch die Secanten gebildeten Tangenten ist:

$$\mathrm{bh} = \sqrt{2 + \sqrt{3}} - 2 - \sqrt{3};\ \mathrm{bg} = 2 - \sqrt{3};\ \mathrm{bf} = \sqrt{2} - 1;$$

$$\mathrm{bc} = \tfrac{1}{3}\sqrt{3};\ \mathrm{bd} = \sqrt{2}\sqrt{3} + \sqrt{3} - \sqrt{2} - 2;\ \mathrm{ba} = 1.$$

Beweis. Zuerst ist $\mathrm{bh} = 2\sqrt{2 + \sqrt{3}} - 2 - \sqrt{3}$ nach dem vorigen Zusatz. Dann ist $\mathrm{bg} = \mathrm{bh} + \mathrm{hg} = 2 - \sqrt{3}$. Ferner $\mathrm{bf} = \mathrm{bg} + \mathrm{gf}$, oder $\mathrm{bf} = 2 - \sqrt{3} + \sqrt{3} + \sqrt{2} - 3 = \sqrt{2} - 1$; dann ist $\mathrm{be} = \mathrm{bf} + \mathrm{fe} =$

$= \sqrt{2} - 1 + 1 - \sqrt{2} + \frac{1}{3}\sqrt{3} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$, endlich $\mathrm{bd} = \mathrm{be} + \mathrm{ed} =$

$= \frac{1}{3}\sqrt{3} + \sqrt{2}\sqrt{3} + \frac{2}{3}\sqrt{3} - \sqrt{2} - 2 = \sqrt{2}\sqrt{3} + \sqrt{3} - \sqrt{2} - 2.$

Also erste Tangente $\mathrm{bh} = 0{,}1316525$, zweite $\mathrm{bg} = 2 - 1{,}7320508 =$

$= 0{,}2679491$, die dritte $\mathrm{bf} = 1{,}4142135 - 1 = 0{,}4142135$, die vierte

$\mathrm{bc} = \frac{1}{3} . 1{,}7320508 = 0{,}5773502$, die fünfte $\mathrm{bd} = 2{,}4494896 +$

$+ 1{,}7320508 - 1{,}4142135 - 2 = 4{,}1815404 - 3{,}4142135 = 0{,}7673269.$

Zusatz 5. Die Secanten selber, welche die Abschnitte der Tangente bilden, sind: $\mathrm{ac} = \sqrt{2}$; $\mathrm{cd} = \sqrt{1 + (\sqrt{2}\sqrt{3} + \sqrt{3} - \sqrt{2} - 2)^2}$;

Hosted by Google

$ec = {}^2/_3\sqrt{3}$; $fc = \sqrt{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$; $gc = 2\sqrt{2-\sqrt{3}}$, und zuletzt

$$hc = 2\sqrt{2+\sqrt{3}}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}.$$

Beweis. $ac = \sqrt{\overline{ab}^{-2} + \overline{bc}^{-2}} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$;

$dc = \sqrt{\overline{db}^{-2} + \overline{hc}^{-2}} = \sqrt{1-(\sqrt{2}\sqrt{3}+\sqrt{3}-\sqrt{2}-2)^2}$;

$ec = \sqrt{\overline{eb}^{-2} + \overline{bc}^{-2}} = \sqrt{({}^1/_3\sqrt{3})^2+1} = \sqrt{{}^4/_3} = {}^2/_3\sqrt{3}$;

$fc = \sqrt{\overline{fb}^{-2} + \overline{bc}^{-2}} = \sqrt{(\sqrt{2}-1)^2+1} = \sqrt{2-2\sqrt{2}+1+1} =$

$= \sqrt{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$; $gc = \sqrt{\overline{gb}^{-2} + \overline{bc}^{-2}} = \sqrt{(2-\sqrt{3})^2+1} =$

$= \sqrt{4-4\sqrt{3}+4} = 2\sqrt{2-\sqrt{3}}$; endlich $hc = \sqrt{\overline{hb}^{-2} + \overline{bc}^{-2}} =$

$= \sqrt{(2\sqrt{2+\sqrt{3}}-2-\sqrt{3})^2+1} =$

$= \sqrt{4(2+\sqrt{3}) - 4(2+\sqrt{3})\sqrt{2+\sqrt{3}} + 4 + 4\sqrt{3}+4} =$

$= \sqrt{4(2+\sqrt{3}) - 4(2+\sqrt{3})\sqrt{2+\sqrt{3}} + 4(2+\sqrt{3})} =$

$= 2\sqrt{2+\sqrt{3}}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$.

Also ist $ac = 1{,}4142135$; $dc = \sqrt{1+0{,}5887905} = 1{,}2604723$; $ec = {}^2/_3, 1{,}7320508 = 1{,}1547005$; $fc = 1{,}4142135 \cdot \sqrt{0{,}5857864} =$ $= 1{,}4142135 \cdot 0{,}7653668 = 1{,}0823920$; $gc = 2 \cdot 05176380 = 1{,}0352760$; endlich $hc = 3{,}8637033 \cdot \sqrt{2-1{,}9318516} = 3{,}8637033 \cdot \sqrt{0{,}0681483} =$ $= 3{,}8637033 \cdot 0{,}2610522 = 1{,}0086282$.

b. Die Tangente des Bogens von 45^0 ist gleich dem Halbmesser, der Einheit, und der Sinus des doppelten Bogens, von 90^0 gleich dem Halbmesser, der Einheit. Aber für Tangenten bei Bogen, welche > 0 und $< {}^1/_2 Q$, und für Sinusse bei Bogen, welche > 0 und $< Q$ sind, gilt die Bestimmung, daß die Tangente des einfachen Bogens immer kleiner sein muß als der Sinus des doppelten.

Beweis. Der Cosinus von 45^0 ist der kleinste Cosinus aller Cosinusse von 0^0 an bis 45^0; also auch $\cos bi > \cos 45^0$; $\cos \overline{bi}^{-2} > \cos \overline{45^0}^{-2}$; oder

Hosted by Google

$2\cos \overset{-2}{bi} > 2\cos \overset{-2}{45^0}$; $2\cos \overset{-2}{bi} > 1$; mithin $2\cos bi > \frac{1}{\cos bi}$;

$2\sin bi . \cos bi > \frac{\sin bi}{\cos bi}$; $\sin 2bi > \tan bi$.

Verhältniß gewiſſer einzelner Abſchnitte zu einander und gegenſeitige Beſtimmung des einen aus dem andern.

1. Lehrſatz. Das erſte Stück bh, ſelbſt eine Tangente, iſt gleich dem letzten Stücke ad der ganzen Tangente ab dividirt durch die Differenz der Zahl 2 und des letzten Stückes da.

$$bh = \frac{da}{2 - da}.$$

Beweis. Es iſt $bh:hg = bc:gc$; $hg:gf = hc:fc$; $gf:fe = gc:ec$; $fe:ed = fc:dc$; $ed:da = ec:ac$. Daher auch $bh:da = bc.hc:dc.ac$, oder $bh:da = \sqrt{1+\overset{-2}{bh}} : \sqrt{2}\sqrt{1+(1-ad)^2} =$

$= \sqrt{1+\overset{-2}{bh}} : \sqrt{2}\sqrt{2-2ad+\overset{-2}{ad}}$, daher $\frac{bh}{\sqrt{1+\overset{-2}{bh}}} \times \sqrt{2} =$

$= \frac{da}{\sqrt{2-2ad+\overset{-2}{ad}}}$, alſo auch $\sqrt{\frac{2\overset{-2}{bh}}{1+\overset{-2}{bh}}} = \sqrt{\frac{\overset{-2}{da}}{2-2da+\overset{-2}{da}}}$,

und $\frac{2\overset{-2}{bh}}{1+\overset{-2}{bh}} = \frac{\overset{-2}{da}}{2-2da+\overset{-2}{da}}$, alſo iſt auch $\overset{-2}{bh} : 1+\overset{-2}{bh} =$

$= \overset{-2}{da} : 4-4da+2\overset{-2}{da}$, oder auch $\overset{-2}{bh} : 1 = \overset{-2}{da} : \overset{-2}{da} + 4 - 4da$, mithin

$\overset{-2}{bh} = \frac{\overset{-2}{da}}{\overset{-2}{da}-4da+4}$ und $bh = \frac{da}{\sqrt{\overset{-2}{da}-4da+4}}$. Nun iſt

$\overset{-2}{da} - 4da + 4$ ebenſowohl ein vollſtändiges Quadrat von $2-da$, als von $da-2$. Weil man aber keinen negativen Werth gebrauchen kann und da ein beſtimmter poſitiver Ausdruck iſt, ſo muß auch ſein $bh = \frac{da}{2-da}$.

2. Lehrſatz. Das letzte Stück da der ganzen Tangente ab iſt gleich dem

Hosted by Google

doppelten ersten Stück bh dividirt durch die Summe der Zahl 1 und des ersten Stückes bh, oder es ist:

$$da = \frac{2bh}{1+bh}.$$

Beweis. Nach dem vorigen Lehrsatze war $bh = \frac{da}{2-da}$. Daher ist auch $bh:1 = da:2-da$, und $bh:1+bh = da:2$, mithin ist $da = \frac{2bh}{1+bh}$.

Zusatz 1, So groß die Abschnitte auch werden, und der letzte ist der größeste, so muß doch dieser letzte, größeste kleiner sein, als das Doppelte des kleinsten, nemlich des ersten.

$$da < 2bh.$$

Denn es ist $da:bh = 2:1+bh$, daher kleiner als $2:1$.

Zusatz 2. Je kleiner der erste Abschnitt ist, desto näher kommt der letzte dem Doppelten des ersten.

Je größer nemlich bh ist, um so viel mehr muß auch in dem Verhältniß $1+bh:2$ zu der Eins hinzuaddirt werden, also wird der Quotient $\frac{1+bh}{2}$ um so viel größer als $1/2$, und je kleiner bh ist, desto ähnlicher und gleicher ist $\frac{1+bh}{2}$ mit $1/2$ und dem Verhältniß $1:2$.

Zusatz 3. Nennt man die Anzahl der Abschnitte, worin die ganze Tangente getheilt ist, n, so muß der erste kleinste Abschnitt $bh > \frac{1}{2n-1}$ sein.

Beweis. Da jedes folgende Stückchen kleiner sein muß als das Doppelte des ersten, so ist auch $2bh(n-1)+bh > 1$, oder $bh(2n-2+1) > 1$; $bh(2n-1) > 1$; $bh > \frac{1}{2n-1}$.

Da nun $\frac{1}{2n-1} > \frac{1}{2n}$, so ist auch $bh > \frac{1}{2n}$, die Tangente größer als der gehörende Bogen. Denn da die Anzahl der Theile der Tangente n war, und also ebenso viel die Anzahl der Bogenstücke zu einem halben Quadranten, so muß die Anzahl zu einem ganzen Quadranten $2n$ sein.

c. Es gilt also auch folgende Bestimmung:

Der wievielte Theil die Tangente zu dem Halbmesser ist (in den Grenzen zwischen 0 und dem Ganzen), ein noch kleinerer Theil muß der gehörende Bogen

Hosted by Google

zu einem Quadranten oder der Winkel zu einem rechten sein. Es sind daher die Tangenten größer als die Bogen und größer als die Winkel zu nennen.

Zusatz 4. Bogen, Sinus und Tangente verhalten sich daher in den Grenzen zwischen 0 und dem Ganzen, daß die Tangente das größeste und der Bogen das kleinste Maß hat.

Beweis. Da die Tangente desselben Bogens größer ist, als der Bogen und größer ist als der Sinus „vergl. Diesterwegs Trigonometrie Lehrsatz 6, S. 27, aber die Tangente nach dem vorigen Zusatz größer ist als der Bogen nach der Maßbestimmung, und Tangente und Sinus nach demselben Maße, dem Halbmesser, bestimmt werden, so muß der größeste Theil, welcher die Tangente ausmacht, auch ein größeres Maß haben, als der kleinste, welcher den Sinus ausmacht. Da ferner bei Bogen $< Q$ nach I die Sinusse ein größerer Theil zum Halbmesser sind, als der Bogen zu einem Quadranten, so müssen auch die Bogen das kleinste Maß enthalten.

3. Lehrsatz. Die Summe des ersten und des letzten Stückes der ganzen Tangente oder $bh + da$ ist gleich $\frac{bh(3+bh)}{1+bh}$, und die Differenz $da - bh = \frac{bh(1-bh)}{1+bh}$.

Beweis. Es ist $bh + da = bh + \frac{2bh}{1+bh} = \frac{bh(1+bh)+2bh}{1+bh} = \frac{bh(3+bh)}{1+bh}$. Zweitens $da - bh = \frac{2bh - bh(1+bh)}{1+bh} = \frac{bh(1-bh)}{1+bh}$.

Zusatz. Es ist $da + bh : da - bh = 3 + bh : 1 - bh$.

Beweis. Nach dem Lehrsatze ist $da + bh : da - bh = \frac{bh(3+bh)}{1+bh} : \frac{bh(1-bh)}{1+bh}$ oder also $da + bh : da - bh = 3 + bh : 1 - bh$.

4. Lehrsatz. Der kleinste Abschnitt bh, welcher größer war, als die Hälfte jedes andern Abschnittes vor 45^0, ist kleiner als die Hälfte eines Abschnittes nach 45^0. Der nächste Abschnitt selbst nach 45^0 ist gleich $\frac{2bh}{1-bh}$. Es verhalten sich daher die beiden Abschnitte um 45^0, wie $1 - bh : 1 + bh$.

$$as = \frac{2bh}{1-bh} \text{ und } bh = \frac{as}{2+as}.$$

Beweis. Es ist $bh : as = bc . hc : ac . cs = \sqrt{1+bh^{-2}} : \sqrt{2 \times cs} =$

$= \sqrt{1 + \overline{bh}^{-2}} : \sqrt{2}\sqrt{1 + (1+as)^2}$; $\overline{bh}^{-2} : 1 + \overline{bh}^{-2} = \overline{as}^{-2} : 2(2 + 2as + \overline{as}^{-2})$.

Oder $\overline{bh}^{-2} : 1 = \overline{as}^{-2} : 4 + 4as + \overline{as}^{-2} = \overline{as}^{-2} : (2+as)^2$, also $bh : 1 = as : 2 + as$,

mithin $bh = \frac{as}{2+as}$ und $as = 2bh + bh.as$; $as(1-bh) = 2bh$,

daher $as = \frac{2bh}{1-bh}$, also $as > 2bh$. Ferner verhält sich nun auch:

$da : as = \frac{2bh}{1+bh} : \frac{2bh}{1-bh} = 1 - bh : 1 + bh.$

Außer dem ersten kleinsten Abschnitt bh, welcher selbst eine kleine Tangente ist, sind alle übrigen Abschnitte Differenzen von Tangenten, und diese Tangenten sind immer Tangenten eines Bogens, welcher ein Wievielfaches desjenigen Bogens bi ist, zu dem der erste Abschnitt bh selber eine Tangente ist. Es lassen sich daher leicht jene Tangenten berechnen aus der ersten kleinsten Tangente und daraus die Abschnitte.

Es ist 1) die Tangente bg des doppelten Bogens ($bk = 2bi$) gleich $\frac{2bh}{1-\overline{bh}^{-2}}$ und 2) die Tangente des dreifachen Bogens $bf = \frac{bh(3-\overline{bh}^{-2})}{1-3\overline{bh}^{-2}}$.

Beweis. Erstens zu 1). Es ist $\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a . \tan b}$,

also $\tan 2a = \frac{2\tan a}{1-\overline{\tan a}^{-2}}$, oder auch $bg = \frac{2bh}{1-\overline{bh}^{-2}}$.

Zweitens zu 2). Es ist $\tan(a+2a) = \frac{\tan a + \frac{2\tan a}{1-\overline{\tan a}^{-2}}}{1 - \tan a \left(\frac{2\tan a}{1-\overline{\tan a}^{-2}}\right)}$, also

$\tan 3a = \frac{3\tan a - \overline{\tan a}^{-3}}{1 - 3\overline{\tan a}^{-2}}$, also auch $bf = \frac{bh(3-\overline{bh}^{-2})}{1-3\overline{bh}^{-2}}$.

5. Lehrsatz. Das zweite Stückchen hg der ganzen Tangente ab ist gleich $\frac{bh(1+\overline{bh}^{-2})}{1-\overline{bh}^{-2}}$.

Hosted by Google

Beweis. Es ist $hg = bg - bh = \frac{2bh}{1-\overset{-2}{bh}} - bh = \frac{2bh-(1-\overset{-2}{bh})bh}{1-\overset{-2}{bh}}$,

oder $hg = \frac{bh+\overset{-3}{bh}}{1-\overset{-2}{bh}} = \frac{bh(1+\overset{-2}{bh})}{1-\overset{-2}{bh}}$.

Zusatz 1. Es verhält sich die Tangente des doppelten Bogens zum zweiten Stückchen der ganzen Tangente, wie der Diameter zur ersten Secante Quadrat.

$$bg : hg = 2 : \overset{-2}{hc}.$$

Beweis. $bg:hg = \frac{2bh}{1-\overset{-2}{bh}} : \frac{bh(1+\overset{-2}{bh})}{1-\overset{-2}{bh}} = 2:1+\overset{-2}{bh} = 2:\overset{-2}{hc}$.

Zusatz 2. Es ist $2bh:bg = \overset{-2}{hc}:gc$, das ist: die doppelte Tangente des Bogens verhält sich zur Tangente des doppelten Bogens, wie das Quadrat der ersten Secante zur zweiten Secante.

Beweis. Es ist $\overset{-2}{hc} = 1+\overset{-2}{bh}$, und $\overset{-2}{gc} = 1+\overset{-2}{bg}$;

$$gc = \sqrt{1+\frac{4\overset{-2}{bh}}{(1-\overset{-2}{bh})^2}} = \sqrt{\frac{1-2\overset{-2}{bh}+\overset{-4}{bh}+4\overset{-2}{bh}}{(1-\overset{-2}{bh})^2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{1+2\overset{-2}{bh}+\overset{-4}{bh}}}{1-\overset{-2}{bh}} = \frac{1+\overset{-2}{bh}}{1-\overset{-2}{bh}}.$$ Also $\overset{-2}{hc}:gc = 1+\overset{-2}{bh} : \frac{1+\overset{-2}{bh}}{1-\overset{-2}{bh}}$. Da

$bg = \frac{2bh}{1-\overset{-2}{bh}}$, so $1-\overset{-2}{bh} = \frac{2bh}{bg}$, daher $\overset{-2}{hc}:gc = 1-\overset{-2}{bh}:1 = 2bh:bg$.

6. Lehrsatz. Es ist das dritte Stückchen der ganzen Tangente ab nemlich $gf = \frac{bh(1+\overset{-2}{bh})^2}{3\overset{-4}{bh}-4\overset{-2}{bh}+1}$.

Beweis. Es ist $gf = bf - bg = \frac{3bh-\overset{-3}{bh}}{1-3\overset{-2}{bh}} = \frac{2bh}{1-\overset{-2}{bh}}$, oder

Hosted by Google

$$g\,f = \frac{3\,b\,h - \overset{-3}{b\,h} - 3\,\overset{-3}{b\,h} + \overset{-5}{b\,h} - 2\,b\,h + 6\,\overset{-3}{b\,h}}{1 - 3\,\overset{-2}{b\,h} - \overset{-2}{b\,h} + 3\,\overset{-4}{b\,h}} = \frac{\overset{-5}{b\,h} + 2\,\overset{-3}{b\,h} + b\,h}{1 - 4\,\overset{-2}{b\,h} + 3\,\overset{-4}{b\,h}} =$$

$$= \frac{b\,h\,(\overset{-4}{b\,h} + 2\,\overset{-2}{b\,h} + 1)}{1 - 4\,\overset{-2}{b\,h} + 3\,\overset{-4}{b\,h}} = \frac{b\,h\,(1 + \overset{-2}{b\,h})^2}{(1 - 3\,\overset{-2}{b\,h})\,(1 - \overset{-2}{b\,h})}.$$

7. Lehrſatz. Das erſte Stückchen der ganzen Tangente a b verhält ſich zum zweiten $b\,h : h\,g = 1 - \overset{-2}{b\,h} : 1 + \overset{-2}{b\,h}$, und das zweite zum dritten $h\,g : g\,f =$
$= 1 - 3\,\overset{-2}{b\,h} : 1 + \overset{-2}{b\,h}$.

Beweis. Zuerſt iſt $b\,h : h\,g = b\,h : \frac{b\,h\,(1+\overset{-2}{b\,h})}{1 - \overset{-2}{b\,h}} = 1 - \overset{-2}{b\,h} : 1 + \overset{-2}{b\,h}$.

Dann iſt $h\,g : g\,f = \frac{b\,h\,(1+\overset{-2}{b\,h})}{1 - \overset{-2}{b\,h}} : \frac{b\,h\,(1 + \overset{-2}{b\,h})^2}{1 - 4\,\overset{-2}{b\,h} + 3\,\overset{-4}{b\,h}} =$

$= b\,h\,(1 + \overset{-2}{b\,h}) : \frac{b\,h\,(1 + \overset{-2}{b\,h})^2}{1 - 3\,\overset{-2}{b\,h}}$, oder $hg : gf = (1+\overset{-2}{bh})(1-3\overset{-2}{bh}) : 1+2\overset{-2}{bh}+$
$+ \overset{-4}{b\,h} = 1 - 3\,\overset{-2}{b\,h} : 1 + \overset{-2}{b\,h}$.

Zuſatz 1. Das zweite Stückchen der ganzen Tangente iſt auch gleich der Tangente des erſten Bogens dividirt durch den Coſinus des doppelten Bogens; und es verhält ſich daher auch das erſte Stückchen zum zweiten, wie der Coſinus des doppelten Bogens zu dem Halbmeſſer der Einheit.

$$h\,g = \frac{b\,h}{\cos b\,k};\quad b\,h : h\,g = \cos b\,k : 1.$$

Beweis. Da $h\,g = \frac{b\,h\,(1+\overset{-2}{b\,h})}{1 - \overset{-2}{b\,h}}$, ſo iſt auch $hg = \frac{\tan(\overset{-2}{\sec})}{(1+\tan)(1-\tan)} =$

$$= \frac{\sin}{\cos\overset{-3}{(1-\tan)}\overset{-2}{}} = \frac{\sin}{\cos\overset{-3}{}\left(1 - \frac{\sin}{\cos\overset{-2}{}}\right)} = \frac{\sin}{\cos\,(1 - 2\sin)\overset{-2}{}} = \frac{\tan}{\cos - \sin\overset{-2}{}} =$$

$= \frac{\tan a}{\cos 2a}$, denn es iſt $\cos(a + a) = \cos 2a = \cos a \,.\, \cos a - \sin a \,.\, \sin a =$
$= \cos a - \sin a$. Alſo $h\,g = \frac{b\,h}{\cos b\,k}$ und $b\,h : h\,g = \cos b\,k : 1$.

Hosted by Google

Zusatz 2. Da $bh:hg = 1 - bh^{-2} : 1 + bh^{-2}$, auch $da:as = 1 - bh^{-1} : 1 + bh^{-2}$ war, so verhält sich auch das erste Stückchen zu dem zweiten, wie das letzte vor 45^0 zu dem nächsten nach 45^0 folgenden.

8. Lehrsatz. Auch verhält sich das erste Stück bh der ganzen Tangente ab zum zweiten hg, wie sich verhält die halbe Summe des zweiten und dritten $\frac{1}{2}hf$ zu dem dritten Stücke gf.

Beweis. Es war nach dem vorigen Lehrsatze $hg:gf = 1 - 3bh^{-2} : 1 + bh^{-2}$; also ist nun auch $hg + gf : gf = 2 - 2bh^{-2} : 1 + bh^{-2} = 2(1 - bh^{-2}) : 1 + bh^{-2}$;

$$hg + gf : gf = 2 : \frac{1 + bh^{-2}}{1 - bh^{-2}} = 2 : \frac{hg}{bh} = 2bh : hg, \text{ mithin}$$

$$bh : hg = \tfrac{1}{2}(hg + gf) : gf = \tfrac{1}{2}hf : gf.$$

9. Lehrsatz. Das zweite Stück hg verhält sich zu dem dritten gf, wie sich verhält die Differenz des zweiten und ersten zur halben Differenz des dritten und zweiten,

$$hg : gf = hg - bh : \tfrac{1}{2}(gf - hg).$$

Beweis. Da $bh:hg = \frac{1}{2}(hg + gf):gf$, so ist auch $bh:hg = hg + gf:2gf$, oder $hg - bh:hg = gf - hg:2gf$, daher $hg - bh:\frac{1}{2}(gf - hg) = hg:gf$.

10. Lehrsatz. Das erste Stück verhält sich zur Summe des zweiten und dritten, wie sich verhält die Differenz des zweiten und ersten Stückes zur Differenz des dritten und zweiten.

$$bh : hg + gf = hg - bh : gf - hg.$$

Beweis. Nach Lehrsatz 8 ist $bh : \frac{1}{2}(hg + gf) = hg:gf$, und nach Lehrsatz 9 $hg:gf = hg - bh : \frac{1}{2}(gf - hg)$, folglich auch $bh : \frac{1}{2}(hg + gf) = hg - bh : \frac{1}{2}(gf - hg)$ oder $bh : hg + gf = hg - bh : gf - hg$.

Zusatz 1. Der Unterschied der zwei folgenden Stücke muß größer sein, als das Doppelte des Unterschiedes der zwei vorhergehenden.

$$gf - hg > 2(hg - bh).$$

Denn $hg + gf > 2bh$, weil sowohl $hg > bh$, also auch $gf > bh$ ist.

Zusatz 2. Das dritte Stück der Tangente ist auch gleich dem Quadrat des zweiten dividirt durch das um das zweite verminderte Doppelte des ersten.

$$gf = \frac{hg^{-2}}{2bh - hg}.$$

Hosted by Google

Beweis. Nach Lehrsatz 8 war $bh:hg = \frac{1}{2}(hg + gf):gf$, das heißt also $a:b = \frac{1}{2}(b + c):c$, folglich $a:b = b + c:2c$; $a - b:b = b - c:2c$; $a - \frac{1}{2}b:\frac{1}{2}b = b:c$, mithin $c = \frac{\frac{1}{2}b^2}{a - \frac{1}{2}b} = \frac{b^2}{2a - b}$.

Zusatz 3. Das Quadrat des zweiten Stückes ist kleiner als das Rechteck des ersten und dritten $b^2 < a.c$; $\overline{hg}^{-2} < bh.gf$.

Aus der Gleichung des vorigen Zusatzes ergibt sich, daß $2a.c - b.c = b^2$. Da nun $bc > a.c$, oder $hg.gf > bh.hg$, so auch $b^2 < a.c$, oder $\overline{hg}^{-2} < bh.gf$.

Es sei nun die Anzahl der Stücke der ganzen Tangente von 45^0 genau durch 3 theilbar, so schließt der Schenkel des Winkels von 15^0 einen Abschnitt ab. Dieser zunächst unter 15^0 liegende Abschnitt sei hg, und der obere nach 15^0 zunächst folgende sei gf. Nun kann man leicht solche Bestimmungen erhalten, aus welchen sich das gegenseitige Verhältniß dieser Abschnitte sowohl zu dem ersten Stück, der kleinsten Tangente, als auch unter einander erkennen läßt.

11. Lehrsatz. Es ist $bh = \frac{hg}{\overline{\sec 15^0}^{-2} - \tan 15^0.hg} = \frac{gf}{\overline{\sec 15^0}^{-2} + \tan 15^0.gf}$.

Beweis. Zuerst ist $bh:hg = bc.hc:hc.gc$. Im erstern Falle ist hc die erste Secante, im zweiten die letzte Secante vor 15^0, die vorletzte bis 15^0. Also auch $\overline{bh}^{-2}:\overline{hg}^{-2} = 1 + \overline{bh}^{-2}:\overline{\sec 15^0}^{-2}(1 + (\overline{\tan 15^0}^{-2} - hg)^2)$; $\overline{bh}^{-2}:1 = \overline{hg}^{-2}:\overline{\sec 15^0}^{-2}(\overline{\sec 15^0}^{-2} - 2\tan 15^0.hg + \overline{hg}^{-2}) - \overline{hg}^{-2}$, oder $\overline{bh}^{-2}:1 = \overline{hg}^{-2}:(\overline{\sec 15^0}^{-2})^2 - 2\overline{\sec 15^0}^{-2}.\tan 15^0.hg + \overline{\tan 15^0}^{-2}.\overline{hg}^{-2}$; daher $bh = \frac{hg}{\overline{\sec 15^0}^{-2} - \tan 15^0.hg}$.

Zweitens ist $bh:gf = bc.hc:gc.fc$, und $\overline{bh}^{-2}:\overline{gf}^{-2} = 1 + \overline{bh}^{-2}:\overline{gc}^{-2}.\overline{fc}^{-2}$, oder $\overline{bh}^{-2}:1 = \overline{gf}^{-2}:\overline{gc}^{-2}.\overline{fc}^{-2} - \overline{gf}^{-2} = \overline{gf}^{-2}:\overline{\sec 15^0}^{-2}(1 + (\tan 15^0 + gf)^2) - \overline{gf}^{-2}$; $\overline{bh}^{-2}:1 = \overline{gf}^{-2}:(\overline{\sec 15^0}^{-2})^2 + 2\overline{\sec 15^0}^{-2}.\tan 15^0.gf + \overline{\tan 15^0}^{-2}.\overline{gf}^{-2}$, daher $bh = \frac{gf}{\overline{\sec 15^0}^{-2} + \tan 15^0.gf}$.

Hosted by Google

12. Lehrſatz. Es iſt $hg = \frac{\overline{\sec 15^0}^2 . bh}{1+\tan 15^0 . bh}$ und $gf = \frac{\overline{\sec 15^0}^2 . bh}{1-\tan 15^0 . bh}$.

Beweis. Aus der erſten Gleichung des vorigen Lehrſatzes ergibt ſich, daß $hg = \overline{\sec 15^0}^2 . bh - \tan 15^0 . hg . bh$, oder auch $hg(1 + \tan 15^0 bh) = \overline{\sec 15^0}^2 . bh$ iſt, alſo $hg = \frac{\overline{\sec 15^0}^2 . bh}{1+\tan 15^0 . bh}$, und aus der zweiten, daß $gf = \overline{\sec 15^0}^2 . bh + \tan 15^0 . gf . bh$, oder $gf(1-\tan 15^0 bh) = \overline{\sec 15^0}^2 . bh$, alſo $gf = \frac{\overline{\sec 15^0}^2 . bh}{1-\tan 15^0 . bh}$.

Zuſatz. Es iſt $hg : gf = 1 - \tan 15^0 bh : 1 + \tan 15^0 bh$.

Der Beweis folgt unmittelbar aus dem Vorigen.

13. Lehrſatz. Auch iſt $bh = \frac{gf - hg}{(gf+hg)\tan 15^0}$.

Beweis. Da $hg : gf = 1 - \tan 15^0 . bh : 1 + \tan 15^0 . bh$, ſo iſt auch $hg + gf : gf = 2 : 1 + \tan 15^0 . bh$, mithin $1 + \tan 15^0 . bh = \frac{2gf}{hg+gf}$; oder $\tan 15^0 . bh = \frac{2gf-(hg+gf)}{hg+gf} = \frac{gf-hg}{hg+gf}$, mithin auch $bh = \frac{gf-hg}{(gf+hg)\tan 15^0}$.

Es läßt ſich aber auch der Werth des erſten Stückes, der kleinſten Tangente, aus der Tangente von 15^0 und einem anliegenden Abſchnitt um 15^0, ſeis dem unteren, ſeis dem oberen, leicht berechnen, indem $bh = \frac{hg}{(4-hg)\tan 15^0} = \frac{gf}{(4+gf)\tan 15^0}$ ſein muß.

Zum Beweiſe dieſes Satzes müſſen wir aber erſt einen andern vorausſchicken, welcher das Verhältniß der beiden um 15^0 liegenden Abſchnitte zu einander beſtimmt.

14. Lehrſatz. Es iſt $hg = \frac{2gf}{2+gf}$ und $gf = \frac{2hg}{2-hg}$.

Beweis. Da nach Lehrſatz 11 $bh = \frac{hg}{\overline{\sec 15^0}^2 - \tan 15^0 . hg} = \frac{gf}{\overline{\sec 15^0}^2 + \tan 15^0 . gf}$, ſo iſt $hg : gf = \frac{1}{\overline{\cos 15^0}^2} - \frac{\sin 15^0}{\cos 15^0} hg : \frac{1}{\overline{\cos 15^0}^2} + \frac{\sin 15^0}{\cos 15^0} gf$,

Hosted by Google

$hg:gf = 1 - \sin 15^0 . \cos 15^0 . hg : 1 + \sin 15^0 . \cos 15^0 . gf$, oder
$hg:gf = 1 - \frac{1}{2} \sin 30^0 hg : 1 + \frac{1}{2} \sin 30^0 . gf = 1 - \frac{1}{4} hg : 1 + \frac{1}{4} gf$.
Daher $hg:gf = 4 - hg : 4 + gf$; und $4 : hg = 4 + 2gf : gf$, also ist
$hg = \frac{4gf}{4 + 2gf} = \frac{2gf}{2 + gf}$. Aus der Proportion $hg:gf = 4 - hg : 4 + gf$
hat man aber auch $4 : gf = 4 - 2hg : hg$, also $gf = \frac{4hg}{4 - 2hg} = \frac{2hg}{2 - hg}$.

15. Lehrsatz. $bh = \frac{hg}{(4 - hg)\tan 15^0} = \frac{gf}{(4 + gf)\tan 15^0}$.

Beweis. Nach Lehrsatz 13 ist $bh = \frac{gf - hg}{(gf + hg)\tan 15^0}$, also auch

$$bh = \frac{\frac{2hg}{2-hg} - hg}{\left(\frac{2hg}{2-hg} + hg\right)\tan 15^0} = \frac{\overset{-2}{hg}}{(4hg - \overset{-2}{hg})\tan 15^0} = \frac{hg}{(4 - hg)\tan 15^0};$$

$$\text{zweitens } bh = \frac{gf - \frac{2gf}{2 + gf}}{\left(gf + \frac{2gf}{2 + gf}\right)\tan 15^0} = \frac{\overset{-2}{gf}}{(4gf + \overset{-2}{gf})\tan 15^0} =$$

$$= \frac{gf}{(4 + gf)\tan 15^0}.$$

16. Lehrsatz. Aus der Tangente von 15^0 und der kleinsten Tangente bh bestimmt ist der zunächst bei 15^0 liegende untere Abschnitt
$hg = \frac{4bh . \tan 15^0}{1 + bh . \tan 15^0}$, und der obere $gf = \frac{4bh . \tan 15^0}{1 - bh . \tan 15^0}$.

Beweis. Da $bh = \frac{hg}{(4 - hg)\tan 15^0}$ so ist also auch
$4bh . \tan 15^0 - bh . hg . \tan 15^0 = hg$; $4bh . \tan 15^0 = hg(1 + bh . \tan 15^0)$,
und also $hg = \frac{4bh . \tan 15^0}{1 + bh . \tan 15^0}$, ebenso weil auch $bh = \frac{gf}{(4 + gf)\tan 15^0}$,
so ist $4bh . \tan 15^0 = gf(1 - bh . \tan 15^0)$, daher $gf = \frac{4bh . \tan 15^0}{1 - bh . \tan 15^0}$.

Zusatz. Ein Abschnitt zunächst unter 15^0 ist kleiner, und einer zunächst nach 15^0 größer als das Vierfache des Rechteckes aus der Tangente von 15^0 und dem ersten Abschnitt.

Bei den Abschnitten, in welche die ganze Tangente von 45^0 getheilt ist, sei nun auch bei 30^0 die Voraussetzung, daß der Schenkel des Winkels von 30^0 genau einen Abschnitt bilde, oder daß die Anzahl der Abschnitte durch 3 genau

Hosted by Google

theilbar sei. Die bei 30^0 zunächst liegende Abschnitte seien der untere fe, der obere ed. Dann läßt sich erstens aus jedem dieser Abschnitte der erste kleinste bh berechnen, zweitens jeder dieser Abschnitte aus bh, und drittens sowohl fe aus ed, als ed aus fe.

17. Lehrsatz. Es ist $bh = \frac{3fe}{4-\sqrt{3}.fe} = \frac{3ed}{4+\sqrt{3}.ed}$.

Beweis. Es ist $bh:hg = bc:gc$; $hg:gf = hc:fc$; $gf:fc = gc:ec$; $fe:ed = fc:dc$, also $bh:fe = bc.hc:fc.ec$, und $bh:ed = bc.hc:ec.dc$.

Also erstens $bh:fe = bc.hc:fc.ec = \sqrt{1+\overline{bh}^{-2}}:fc.ec$. Nun ist aber $ec = \sqrt{\overline{bc}^{-2}+\overline{eb}^{-2}} = \sqrt{1+\frac{1}{4}\overline{ec}^{-2}}$; $\overline{ec}^{-2} = 1+\frac{1}{4}\overline{ec}^{-2}$; $\frac{3}{4}\overline{ec}^{-2} = 1$; $ec = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{2}{3}\sqrt{3}$, also $eb = \frac{1}{3}\sqrt{3}$. Daher hat man die Proportion:

$$bh:fe = \sqrt{1+\overline{bh}^{-2}}:\tfrac{2}{3}\sqrt{3} \times \sqrt{1+(\tfrac{1}{3}\sqrt{3}-fe)^2} =$$

$$= \sqrt{1+\overline{bh}^{-2}}:\tfrac{2}{3}\sqrt{3} \times \sqrt{\tfrac{4}{3}-\tfrac{2}{3}\sqrt{3}.fe+\overline{fe}^{-2}};\ \frac{\overline{bh}^{-2}}{1+\overline{bh}^{-2}} =$$

$$= \frac{fe^2}{\frac{4}{3}(\frac{4}{3}-\frac{2}{3}\sqrt{3}.fe+\overline{fe}^{-2})} = \frac{1}{\frac{1}{\overline{bh}^{-2}}+1}.$$ Mithin ist auch $\frac{1}{\overline{bh}^{-2}}+$

$$+1 = \frac{\frac{4}{3}(\frac{4}{3}-\frac{2}{3}\sqrt{3}.fe+\overline{fe}^{-2})}{\overline{fe}^{-2}},\ \text{und}\ \frac{1}{\overline{bh}^{-2}} = \frac{\frac{16}{9}-\frac{8}{9}\sqrt{3}.fe+\frac{4}{3}\overline{fe}^{-2}-\overline{fe}^{-2}}{\overline{fe}^{-2}},$$

also $\overline{bh}^{-2} = \frac{\overline{fe}^{-2}}{(\frac{4}{3}-\frac{1}{3}\sqrt{3}.fe)^2}$, daher $bh = \frac{fe}{\frac{4}{3}-\frac{1}{3}\sqrt{3}.fe} = \frac{3fe}{4-\sqrt{3}.fe}$.

Zweitens ist $bh:ed = bc.hc:ec.dc = \sqrt{1+\overline{bh}^{-2}}:\frac{2}{3}\sqrt{3}.dc$;

$$bh:ed = \sqrt{1+\overline{bh}^{-2}}:\tfrac{2}{3}\sqrt{3}.\sqrt{1+(be+ed)^2} =$$

$$= \sqrt{1+\overline{bh}^{-2}}:\tfrac{2}{3}\sqrt{3}.\sqrt{\tfrac{4}{3}+\tfrac{2}{3}\sqrt{3}.ed+\overline{ed}^{-2}};$$

$$\overline{bh}^{-2}:1+\overline{bh}^{-2} = \overline{ed}^{-2}:\tfrac{4}{3}(\tfrac{4}{3}+\tfrac{2}{3}\sqrt{3}.ed+\overline{ed}^{-2}) = \overline{ed}^{-2}:\tfrac{16}{9}+\tfrac{8}{9}\sqrt{3}.ed+\tfrac{4}{3}\overline{ed}^{-2}.$$

Hosted by Google

$\overline{bh}^{-2} : 1 = \overline{ed}^{-2} : {}^{16}/_{9} + {}^{8}/_{9}\sqrt{3}.ed + {}^{1}/_{3}\overline{ed}^{-2} = \overline{ed}^{-2} : ({}^{4}/_{3} + {}^{1}/_{3}\sqrt{3}.ed)^2$. Mithin $bh = \frac{ed}{{}^{4}/_{3} + {}^{1}/_{3}\sqrt{3}.ed} = \frac{3ed}{4+\sqrt{3}.ed}$.

18. Lehrsatz. Es ist $fe = \frac{4bh}{3+\sqrt{3}.bh}$, und $ed = \frac{4bh}{3-\sqrt{3}.bh}$.

Beweis. Da nach dem vorigen Lehrsatz $bh = \frac{3fe}{4-\sqrt{3}.fe} = \frac{3}{\frac{4}{fe}-\sqrt{3}}$, so ist $\frac{4}{fe} - \sqrt{3} = \frac{3}{bh}$; $\frac{4}{fe} = \frac{3+\sqrt{3}.bh}{bh}$; $\frac{4bh}{3+\sqrt{3}.bh} = fe$. Ferner da auch $bh = \frac{3ed}{4+\sqrt{3}.ed} = \frac{3}{\frac{4}{ed}+\sqrt{3}}$, so ist $\frac{4}{ed} + \sqrt{3} = \frac{3}{bh}$; $\frac{4}{ed} = \frac{3-\sqrt{3}.bh}{bh}$, also $\frac{4bh}{3-\sqrt{3}.bh} = ed$.

19. Lehrsatz. Es ist $fe = \frac{2ed}{2+\sqrt{3}.ed}$, und $ed = \frac{2fe}{2-\sqrt{3}.fe}$.

Beweis. Da $bh = \frac{3fe}{4-\sqrt{3}.fe} = \frac{3ed}{4+\sqrt{3}.ed}$, so auch $\frac{fe}{4-\sqrt{3}.fe} = \frac{ed}{4+\sqrt{3}.ed}$, mithin $4fe + \sqrt{3}.ed.fe = 4ed - \sqrt{3}.ed.fe$; $4fe + 2\sqrt{3}.ed.fe = 4ed$, also $fe = \frac{4ed}{4+2\sqrt{3}.ed} = \frac{2ed}{2+\sqrt{3}.ed}$, und $ed(4 - 2\sqrt{3}.fe) = 4fe$, also $ed = \frac{2fe}{2-\sqrt{3}.fe}$. Es ist also $fe = \frac{ed}{1+{}^{1}/_{2}\sqrt{3}.ed}$ und $ed = \frac{fe}{1-{}^{1}/_{2}\sqrt{3}.fe}$.

Zusatz 1. Die doppelte Differenz der beiden Abschnitte um 30^0 dividirt durch ihr Produkt ist gleich der Quadratwurzel von drei.

$$\frac{2(ed-fe)}{ed.fe} = \sqrt{3}.$$

Beweis. Da $ed = \frac{fe}{1-{}^{1}/_{2}\sqrt{3}.fe}$, so hat man $ed = \frac{1}{\frac{1}{fe} - {}^{1}/_{2}\sqrt{3}}$;

Hosted by Google

$\frac{1}{fe} - \frac{1}{2}\sqrt{3} = \frac{1}{ed}$; $\frac{1}{fe} - \frac{1}{ed} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$; $\frac{ed - fe}{ed.fe} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$;
$\frac{2(ed - fe)}{ed.fe} = \sqrt{3}$.

Zusatz 2. Es ist $fe < \frac{4}{3} bh$, und $ed > \frac{4}{3} bh$.

Beweis. Nach Lehrsatz 17 ist $bh = \frac{3fe}{4 - \sqrt{3}.fe}$; also auch $3fe = 4bh - \sqrt{3}.fe.bh$; $3fe < 4bh$ und $fe < \frac{4}{3} bh$; ebenso da auch $bh = \frac{3ed}{4 + \sqrt{3}.ed}$, so ist $4bh + \sqrt{3}.ed.bh = 3ed$, also $ed > \frac{4}{3} bh$.

Zusatz 3. Daher auch $bh > \frac{8}{4} fe$, und $bh < \frac{3}{4} ed$.

20. Lehrsatz Das Verhältniß der Abschnitte um 45^0 zu einander $da : as$ ist gleich der vorletzten Tangente bd.

Beweis. Nach Lehrsatz 4 war $da : as = 1 - bh : 1 + bh$; aber die vorletzte Tangente bd ist gleich $1 - da = 1 - \frac{2bh}{1 + bh} = \frac{1 + bh - 2bh}{1 + bh}$, oder $bd = \frac{1 - bh}{1 + bh}$, mithin auch $\frac{da}{as} = bd$.

Nicht immer aber ist der Quotient zweier anliegenden Abschnitte gleich der vorletzten Tangente. So der Quotient $\frac{fe}{ed} = \frac{4bh}{3 + bh\sqrt{3}} : \frac{4bh}{3 - bh\sqrt{3}} = \frac{3 - bh\sqrt{3}}{3 + bh\sqrt{3}}$. Aber die vorletzte Tangente $bf = be - fe = \frac{1}{3}\sqrt{3} - \frac{4bh}{3 + bh\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} - 3bh}{3 + bh\sqrt{3}}$. Wenn nun bf gleich $\frac{fe}{ed}$ sein sollte, so müßte auch $3 - bh\sqrt{3} = \sqrt{3} - 3bh$, oder $3 + 3bh = \sqrt{3} + bh\sqrt{3}$; $3(1 + bh = \sqrt{3}(1 + bh)$, also $3 = \sqrt{3}$ sein, welches unmöglich.

21. Lehrsatz. Der erste Abschnitt ist gleich der Differenz von der ganzen Tangente (der Einheit) und der vorletzten Tangente dividirt durch ihre Summe.

$$bh = \frac{1 - bd}{1 + bd}.$$

Beweis. Nach Lehrsatz 3 ist $da - bh = \frac{bh(1 - bh)}{1 + bh} = bh.bd$, also $da = bh.bd + bh = bh(bd + 1) = 1 - bd$. Mithin auch
$bh = \frac{1 - db}{1 + db}$.

Hosted by Google

Verhältniß des ersten Abschnittes zu einem beliebigen, und gegenseitige Bestimmung des einen aus dem andern.

Ein beliebiger Abschnitt sei x und ende mit m^0, der nächstfolgende heiße y, und der erste Abschnitt, wie immer bh; mit tan m^0 werde die Tangente bezeichnet, die bis dahin geht, wo der Abschnitt x endet, und die Secante daselbst heiße sec m^0.

22. Lehrsatz. Es ist $bh = \frac{x}{\overline{\sec m^0}^2 - \tan m^0 . x} = \frac{y}{\overline{\sec m^0}^2 + \tan m^0 . y}$,

$x = \frac{bh . \overline{\sec m^0}^2}{1 + bh . \tan m^0}$ und $y = \frac{bh . \sec m^0}{1 - bh . \tan m^0}$.

Beweis. Es war bh : hg = bc : gc, und hg : gf = hc : fc, daher auch bh : gf = bc . hc : gc . fc, da auch gf : fe = gc : ec, so bh : fe = = bc . hc : fc . ec, und da auch fe : ed = fc : dc, so bh : ed = bc . hc : ec . dc, und so fort, es verhält sich der erste Abschnitt zu einem andern, wie die Producte aus den Secanten, welche diese Abschnitte begrenzen, daher auch bh : x = = bc . hc : sec m^0 . sec n^0 und bh : y = bc . hc : sec m^0 . sec n'^0, wo n^0 die untere Grenze von x und n'^0 die obere Grenze von y bezeichnet. Nun ist auch: $\overline{bh}^2 : x^2 = \overline{bc}^2 . \overline{hc}^2 : \overline{\sec m^0}^2 . \overline{\sec n^0}^2$, und $\overline{bh}^2 : y^2 = \overline{bc}^2 . \overline{hc}^2 : \overline{\sec m^0}^2 . \overline{\sec n'^0}^2$; $\overline{bh}^2 : x^2 = 1 + \overline{bh}^2 : \overline{\sec m^0}^2 (1 + (\tan m^0 - x)^2)$, und $\overline{bh}^2 : y^2 = 1 + \overline{bh}^2 : \overline{\sec m^0}^2 (1 + (\tan m^0 + y)^2)$; oder $\overline{bh}^2 : 1 = x^2 : (\overline{\sec m^0})^2 - 2 \overline{\sec m^0}^2 . \tan m^0 . x + x^2 . \overline{\tan m^0}^2$, und $\overline{bh}^2 : 1 = y^2 : (\overline{\sec m^0})^2 + 2 \overline{\sec m^0}^2 . \tan m^0 . y + y^2 . \overline{\tan m^0}^2$, daher $bh = \frac{x}{\overline{\sec m^0}^2 - \tan m^0 . x} = \frac{y}{\overline{\sec m^0}^2 + \tan m^0 . y}$.

Dann ist $bh . \overline{\sec m^0}^2 - bh . \tan m^0 . x = x$; $x (1 + bh . \tan m^0) = bh . \overline{\sec m^0}^2$, also $x = \frac{bh . \overline{\sec m^0}^2}{1 + bh . \tan m^0}$. Ebenso für y ist $bh . \overline{\sec m^0}^2 + bh . \tan m^0 . y = y$, also $y (1 - bh . \tan m^0) = bh . \overline{\sec m^0}^2$, daher $y = \frac{bh . \overline{\sec m^0}^2}{1 - bh . \tan m^0}$.

Zusatz. $bh > \frac{x}{\overline{\sec m^0}^2}$ und $bh < \frac{y}{\overline{\sec m^0}^2}$,

$x < bh . \overline{\sec m^0}^2$ und $y > bh . \overline{\sec m^0}^2$.

Hosted by Google

Eigenschaft der Abschnitte und Verhältniß unter einander im Allgemeinen.

23. Lehrsatz. Wie auch immer die Abschnitte, wobei der halbe Quadrant von 0^0 bis 45^0 getheilt ist in gleiche Theile, beschaffen sein mögen, so gehet der Schenkel des Winkels von 30^0, welcher auch einen Abschnitt bilden kann, nie durch die Mitte eines Abschnittes hindurch.

Beweis. Ginge der Schenkel des Winkels von 30^0 durch die Mitte eines Abschnittes hindurch, so wäre also von 45^0 bis 30^0, von a bis e eine bestimmte Anzahl Abschnitte vermehrt um einen halben Abschnitt, $m.\alpha + \frac{1}{2}\alpha$. Ebenfalls müßte dann auch wieder von 30^0 bis 15^0 dieselbe Anzahl der Abschnitte stattfinden, $m.\alpha + \frac{1}{2}\alpha$, also wären von 45^0 bis 15^0 der Abschnitte zusammen $2m.\alpha + \alpha$. Die Entfernung aber von 45^0 bis 15^0 ist 30^0 von dem Quadranten. Nun bildete einmal der Schenkel eines Winkels von 30^0 einen Abschnitt, und wieder ginge er ein andermal durch die Mitte des Abschnittes; von 45^0 bis 15^0 wäre eine Anzahl ganzer Abschnitte, und von 0^0 bis 30^0 eine bestimmte Zahl vermehrt um einen halben. Dieses aber ist unmöglich, weil nach der Voraussetzung die Bogenstücke des halben Quadranten gleich sind, also auch die Entfernung von 45^0 bis 15^0 ebenso viele enthalten muß, wie die von 0^0 bis 30^0.

24. Lehrsatz. Kein Schenkel eines Winkels irgend eines ganzen Grades kann durch die Mitte eines jener Bogenstücke gehen, welche unter sich gleich, zusammen genommen den halben Quadranten ausmachen.

Beweis. Ginge der Schenkel eines solchen Winkels durch die Mitte eines Bogenstückes, so schnitte also der Schenkel des Winkels von doppelt so viel Graden ein Bogenstück ab. Die Anzahl der Grade bis zu dem Abschneiden müßte nothwendigerweise eine gerade sein. Ebenso müßte der Rest von dem Abschneiden bis zu 45^0 eine bestimmte Anzahl der Grade aber eine ungerade ausmachen. Es ist aber 45 genau nur durch 3, durch 5, durch 9 und durch 15 theilbar, alle übrigen Zahlen in 45 getheilt geben keine ganze Zahl. Zuerst 45 durch 3 getheilt gibt als Abschnitt 15^0, 30^0, 45^0, in fünf Theile getheilt 9^0, 18^0, 27^0, 36^0, 45^0, in neun 5^0, 10^0, 15^0, 20^0, 25^0, 30^0, 35^0, 40^0, 45^0, endlich in fünfzehn Theile 3^0, 6^0, 9^0, 12^0, 15^0, 18^0, 21^0, 24^0, 27^0, 30^0, 33^0, 36^0, 39^0, 42^0, 45^0. Da nun die Anzahl der Grade bis zu dem Abschneiden eines Bogenstückes eine gerade Zahl sein müßte, so kämen also bloß in Betracht 30^0 18^0 36^0 10^0 20^0 40^0 6^0 12^0 24^0 42^0 oder in Ordnung gesetzt folgende zehn 6^0 10^0 12^0 18^0 20^0 24^0 30^0 36^0 40^0 42^0. Nun müßten die Hälften dieser geraden Grade durch die Mitte eines Bogenstückes gehen. Aber die Hälften 3^0 5^0 6^0 9^0 10^0 12^0 15^0 18^0 20^0 21^0 sind so beschaffen,

Hosted by Google

daß wenn ihre Ganzen eine bestimmte ganze Anzahl Theile zu 45 ausmachen, auch sie eine ganze Anzahl Theile bilden müssen. Wenn nemlich bei 6^0 12^0 24^0 42^0 das erste Theilungsstück von 0^0 bis zu 3^0 sein muß, und es 15 Theile bis zu 45^0 geben muß, so bilden auch die Hälften 3^0 6^0 12^0 21^0 bei 15 Theilen Anzahlen von bloß ganzen Stücken. Alle diese Hälften sind entweder 3^0 oder ein wievieltes von 3^0 durch eine ganze Zahl ausgedrückt. Bei 10^0 20^0 40^0 muß die Theilungszahl 5 sein. Eben so sind die Hälften 5^0 10^0 20^0 durch 5 genau theilbar, und bilden ein bestimmtes wievieltes Ganzes jedes zu den 9 Theilen des halben Quadranten. Ersteres nemlich begreift einen, zweites 2 und letzteres 4 Theile von den in 9 Theile getheilten halben Quadranten. Es blieben also noch 18^0 30^0 36^0 mit den Hälften 9^0 15^0 18^0 übrig. Hiervon kann 18^0 entweder 2 Theile ausmachen von dem ersten Theil 9^0, daß es also 5 Theile gibt; dann bildet also auch die Hälfte 9^0 einen ganzen Theil, oder 18^0 besteht aus 6 Theilen, deren erstes Theilungsstück 3^0; in diesem Fall macht auch die Hälfte 9^0 drei ganze Theile aus. Zweitens 30^0 durch die Theilungszahl 5 macht 6 ganze Theile von den 9 Theilen des halben Quadranten, oder nach der Theilungszahl 15 sind der Theile zwei von den drei Theilen bis zu 45^0; in jedem Falle bildet auch die Hälfte 15^0 eine Anzahl der Theile, entweder 3 oder einen Theil. Endlich 36^0 sind entweder 4 Theile von 5 Theilen bis 45^0, oder 12 Theile von 15 Theilen bis $\frac{1}{2}$ Q. Im ersten Falle muß die Hälfte 18^0 der Theile zwei, im zweiten sechs enthalten

Der halbe Quadrant bestehe nun aus einer beliebigen Anzahl Bogenstücke, z. B. n, so können die Grade der geraden Zahlen, welche in Betracht kommen, nur entweder $\frac{2}{3}$ oder $\frac{2}{5}$, $\frac{4}{5}$ oder $\frac{2}{9}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{6}{9}$, $\frac{8}{9}$, oder $\frac{2}{15}$, $\frac{4}{15}$, $\frac{6}{15}$, $\frac{8}{15}$, $\frac{10}{15}$, $\frac{12}{15}$, $\frac{14}{15}$ von den n Theilen sein, also ein $\frac{2m}{p}$ von der ganzen Anzahl der Theile, und nicht auch $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{3}{9}$ und so weiter, weil ja auch die halben Grade wieder ganze Theile von der ganzen Anzahl der Theile geben mußten. Ist daher $\frac{2n}{3}$, $\frac{8n}{9}$, $\frac{12n}{15}$ u. s. w. bei den geraden Graden eine ganze Zahl, so muß auch $\frac{n}{3}$, $\frac{4n}{9}$, $\frac{6n}{15}$ u. s. w. wieder eine ganze Zahl geben. Die Hälften schneiden also, man mag n so groß nehmen als man will, immer wieder ein ganzes Bogenstück ab, so oft die doppelten geraden Grade die Stücke abtheilen. Daher kann kein Schenkel eines Winkels, welcher einen ganzen Grad abgibt, durch die Mitte eines jener Bogenstücke hindurchgehen.

25. Lehrsatz. Die Abschnitte der ganzen Tangente von 45^0, überhaupt und allgemein, jeder beliebige zu einem andern beliebigen, verhalten sich zu einander, wie die Produkte der Secanten, welche die Abschnitte abschließen.

Beweis. Es war $bh:hg = bc:gc$, also auch $bh:hg = bc.hc::hc.gc$, ferner da auch $hg:gf = hc:fc$, so auch $hg:gf = hc.gc:gc.fc$, dann war $bh:gf = bc.hc:gc.fc$; $bh:ed = bc.hc:ec.dc$, und so

fort, also ist auch da $g.f : fe = gc : ec$, nun $hg : fe = hc.gc : fc.ec$, und da $fe : ed = fc : dc$, auch $hg : ed = hc.gc : ec.dc$, und so weiter, also auch wenn α und β zwei beliebige Abschnitte sind, $\sec \zeta^0$ und $\sec \eta^0$ den Abschnitt α, aber $\sec \mu^0$ und $\sec \nu^0$ den Abschnitt β abschließen, so hat man $\alpha : \beta = \sec \zeta^0 . \sec \eta^0 : \sec \mu^0 . \sec \nu^0$.

26. Lehrsatz. Das Verhältniß der Abschnitte zu einander ist kleiner als das der Secanten, d. h. ein folgender Abschnitt nimmt mehr verhältnißmäßig zu, als eine folgende Secante zu der frühern.

Beweis. Wenn man die Secanten, wie sie folgen, mit A, B, C, D und so weiter bezeichnet, so müssen sich also die Abschnitte der ganzen Tangente nach ihrer Reihe zu einander verhalten, wie $AB : BC : CD : DE : EF : FG : GH$ u. s. w. Eine solche Reihe kann angesehen werden als entstanden aus zwei durch Multiplication nemlich $A : B : C : D : E : F$ die erste, und bei der zweiten fehlet nur das erste Glied, hat dagegen ein weiteres, sonst ist sie einerlei mit der ersten, nemlich $B : C : D : E : F : G$, und so fort. Da nun jede folgende Secante immer größer ist, als die vorhergehende, so muß auch, wenn zu dem Verhältniß der einfachen Reihe ein Faktor hinzukommt, der ein ächter Bruch ist, dieses Verhältniß kleiner werden als das ursprüngliche war. Nemlich wenn zu dem Verhältniß $A : B$ der Faktor $\frac{B}{C}$, wo $B < C$, hinzukommt, so muß etwas kleineres herauskommen, und $\frac{A.B}{B.C} < \frac{A}{B}$ sein. Ebenso $A : D$, $A : F$, $C : E$ in Vergleich von $AB : DE$, $AB : FG$; $CD : EF$. Die Quotienten $\frac{B}{E}, \frac{B}{G} \cdot \frac{D}{F}$ sind ächte Brüche. Um wie viel daher eine folgende Secante zunimmt in Betreff einer frühern, nur noch so viel mehr ein Abschnitt der ganzen Tangente zu seinem früheren Abschnitt. Wenn z. B. $D > A$ ist, so ist $D.E$ noch mehr größer als $A.B$. Denn das Verhältniß $\frac{D}{A}$tel wird mit einem unächten Bruche noch multiplicirt, mit $\frac{E}{B}$.

Zusatz 1. Die Secanten solcher Bogenstücke verhalten sich zu einander, die eine zu jeder beliebigen andern, umgekehrt wie die Sinusse der Winkel, welche den Secanten anliegen. Oder es verhält sich auch bei n gleichen Bogenstücken die mte Secante zur pten, wie der Cosinus von

$$\cos \frac{p.45^0}{n} : \cos \frac{m.45^0}{n}.$$

Beweis. Da in jedem rechtwinkeligen Dreieck die Seiten sich verhalten,

Hosted by Google

wie die Sinuſſe der gegenüberſtehenden Winkel, ſo iſt $A:B = \sin g:\sin h$; $B:C = \sin f:\sin g$; $C:D = \sin e:\sin f$; $D:E = \sin d:\sin e$; $E:F = \sin a:\sin d$. Alſo iſt auch $A:F = \sin a:\sin h$; $B:D = \sin e:\sin g$; $C:F = \sin a:\sin f$ u. ſ. w. Mithin auch $g c:d c = \cos d c b:\cos g c b = B:E = \cos\frac{5.45^0}{6}\cos\frac{2.45^0}{6} = \cos\frac{p.45^0}{n}:\cos\frac{m.45^0}{n}$. $A:F = \sin 45^0:\sin h = \cos 45^0:\cos h c b = \cos 45^0:\cos\frac{45^0}{6}$. Alſo verhält ſich die erſte Secante zur letzten $A:\sqrt{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2}:\cos\frac{45^0}{n}$.

Zuſatz 2. Die Secanten laſſen ſich der Reihe nach alſo bezeichnen:

$$\frac{1}{\cos\frac{45^0}{n}}, \frac{1}{\cos\frac{2.45^0}{n}}, \frac{1}{\cos\frac{3.45^0}{n}}, \frac{1}{\cos\frac{4.45^0}{n}}, \frac{1}{\cos\frac{5.45^0}{n}}, \frac{1}{\cos\frac{6.45^0}{n}}.$$

27. Lehrſatz. Die Abſchnitte der ganzen Tangente, ein oberer zum anliegenden unteren, verhalten ſich allgemein und jedesmal ſo zu einander, wie die Summe zu der Differenz aus der Einheit und dem Produkt der Tangente, an deren Ende dieſe Abſchnitte ſind, in die unterſte kleinſte Tangente

$$x:y = 1 - b h . \tan m^0 : 1 + b h . \tan m^0.$$

Beweis. Der Fall bei den Abſchnitten um 15^0 war Lehrſatz 12 Zuſatz erwieſen; ebenſo ergibt ſich aus Lehrſatz 18, da $f e = \frac{4 b h}{3 + \sqrt{3} . b h}$ und $e d = \frac{4 b h}{3 - \sqrt{3} . b h}$, daß $f e:e d = 3 - \sqrt{3} . b h : 3 + \sqrt{3} . b h$, oder $f e:e d = 1 - \frac{1}{3}\sqrt{3} . b h : 1 + \frac{1}{3}\sqrt{3} . b h = 1 - \tan 30^0 . b h : 1 + \tan 30^0 . b h$; und da auch nach Lehrſatz 4 $d a:a s = 1 - b h : 1 + b h$, ſo iſt auch $d a:a s = 1 - \tan 45^0 . b h : 1 + \tan 45^0 . b h$. Aber auch allgemein bei zwei beliebigen aneinander liegenden Abſchnitten x und y um m^0 läßt ſich zeigen, daß $x:y = 1 - \tan m^0 . b h : 1 + \tan m^0 . b h$. Es war nemlich nach Lehrſatz 22

$$x = \frac{b h . \overline{\sec m^0}^2}{1 + b h . \tan m^0} \text{ und } y = \frac{b h . \overline{\sec m^0}^2}{1 - b h . \tan m^0}, \text{ alſo}$$

$$x:y = \frac{1}{1 + b h . \tan m^0} : \frac{1}{1 - b h . \tan m^0} = 1 - bh . \tan m^0 : 1 + bh . \tan m^0.$$

28. Lehrſatz. Die Abſchnitte der ganzen Tangente müſſen, wenn der erſte Bogen mit A bezeichnet wird, der Reihe nach gleich ſein:

$$\frac{b h . \overline{\sec A}^2}{1 + b h . \tan A}; \frac{b h . \overline{\sec 2A}^2}{1 + bh . \tan 2A}; \frac{b h . \overline{\sec 3A}^2}{1 + bh . \tan 3A}, \text{ oder auch}$$

Hosted by Google

$\frac{b\,h\,(1+\tan A)^{-2}}{1+b\,h\,.\tan A}$; $\frac{b\,h\,(1+\tan 2A)^{-2}}{1+b\,h\,.\tan 2A}$; $\frac{b\,h\,(1+\tan 3A)^{-2}}{1+b\,h\,.\tan 3A}$, oder drittens

$\frac{b\,h\,(\cot A+\tan A)}{\cot A+b\,h}$; $\frac{b\,h\,(\cot 2A+\tan 2A)}{\cot 2A+b\,h}$; $\frac{b\,h\,(\cot 3A+\tan 3A)}{\cot 3A+b\,h}$,

das heißt also auch $b\,h\left(\frac{2\,\mathrm{cosec}\,2A}{\cot A+b\,h}\right)$; $b\,h\left(\frac{2\,\mathrm{cosec}\,4A}{\cot 2A+b\,h}\right)$,

$b\,h\left(\frac{2\,\mathrm{cosec}\,6A}{\cot 3A+b\,h}\right)$.

Beweis. Da ein unterer Abschnitt $x=\frac{b\,h\,.\sec m^{0\,-2}}{1+b\,h\,.\tan m^0}$, und der obere $y=\frac{b\,h\,.\sec m^{0\,-2}}{1-b\,h\,.\tan m^0}$, so kann, wenn x der erste Abschnitt ist, also $\tan m^0=\tan A=b\,h$, auch selbst y wieder als ein unterer Abschnitt einer andern Tangente, der $\tan 2A$, angesehen werden. Demnach muß also auch wieder $y=\frac{b\,h\,.\sec 2A^{-2}}{1+b\,h\,.\tan 2A}$ sein und so fort ein dritter Abschnitt, der gleich ist $\frac{b\,h\,.\sec 2A^{-2}}{1-b\,h\,.\tan 2A}$, auch gleich $\frac{b\,h\,.\sec 3A^{-2}}{1+b\,h\,.\tan 3A}$. Daraus ergeben sich leicht die andern Werthbestimmungen. Vergl. auch Diesterwegs Lehrbuch der Trigonometrie S. 24, Zusatz 123.

Von zwei beliebigen an einander liegenden Abschnitten. Weiteres Verhältniß derselben zu einander. Wechselseitige Bestimmung des einen Abschnittes aus dem andern und aus gewissen trigonometrischen Linien. Zweitens Bestimmung einer solchen trigonometrischen Linie a) **aus einer andern trigonometrischen Linie und** b) **aus den beiden Abschnitten.**

29. Lehrsatz. Jede zwei beliebige an einander liegende Abschnitte der ganzen Tangente können wechselweise so auseinander bestimmt werden, daß der untere $x=\frac{y}{1+\sin 2m^0\,.\,y}$ und der obere $y=\frac{x}{1-\sin 2m^0\,.\,x}$ sein muß.

Beweis. Da $x:y=\sec m^{0\,-2}-\tan m^0\,.\,x:\sec m^{0\,-2}+\tan m^0\,.\,y$ nach Lehrsatz 22, so auch $x:y=\frac{1}{\cos m^{0\,-2}}-\frac{\sin m^0}{\cos m^0}\,.\,x:\frac{1}{\cos m^{0\,-2}}-\frac{\sin m^0}{\cos m^0}\,.\,y$; $x:y=$ $=1-\sin m^0\,.\cos m^0\;x:1+\sin m^0\,.\cos m^0\,.\,y=1-{}^1/_2\sin 2m^0\,.\,x:$

Hosted by Google

$: 1 + {}^1/_2 \sin 2\,m^0 . y$, also $\frac{x}{1 - {}^1/_2 \sin 2\,m^0 . x} = \frac{y}{1 + {}^1/_2 \sin 2\,m^0 . y}$, oder

$\frac{1}{{}^1/_x - {}^1/_2 \sin 2\,m^0} = \frac{1}{{}^1/_y + {}^1/_2 \sin 2\,m^0}$, mithin ${}^1/_y + {}^1/_2 \sin 2\,m^0 =$
$= {}^1/_x - {}^1/_2 \sin 2\,m^0$; ${}^1/_x - {}^1/_y = \sin 2\,m^0$; und ${}^1/_x = {}^1/_y + \sin 2\,m^0$, also

$x = \frac{1}{{}^1/_y + \sin 2\,m^0} = \frac{y}{1 + \sin 2\,m^0 . y}$, und ${}^1/_y = {}_1/_x - \sin 2\,m^0$, daher

$y = \frac{1}{{}^1/_x - \sin 2\,m^0} = \frac{x}{1 - \sin 2\,m^0 . x}$.

Zusatz. Da ${}^1/_x - {}^1/_y = \sin 2\,m^0$, so auch $\frac{y - x}{x . y} = \sin 2\,m^0$.

30. Lehrsatz. Die Differenz der Abschnitte ist gleich dem Produkte derselben bei 45^0, und bei 15^0 gleich dem halben Produkte.

Beweis. Da nach dem vorigen Zusatze $\frac{y - x}{x . y} = \sin 2\,m^0$, so auch $y - x = x . y . \sin 2\,m^0$. Ist nun $m^0 = 45^0$, so ist $\sin 2\,m^0 = \sin 90^0 = 1$, und dann $y - x = x . y$; ist aber $m^0 = 15^0$, so ist $\sin 2\,m^0 = \sin 30 = {}^1/_2$, und dann $y - x = {}^1/_2\, x\, y$.

Zusatz. Nur bei den Abschnitten um 45^0 ist die Differenz derselben gleich dem Produkt, in allen übrigen Fällen kleiner als das Produkt.

Beweis. Wenn in der Gleichung $y - x = x . y . \sin 2\,m^0$ dieses m^0 gleich 45^0 ist, so wird $\sin 2\,m^0 = 1$, und $y - x = x . y$; ist aber m^0 größer oder kleiner als 45^0, so wird $\sin 2\,m^0 < 1$, und also auch dann $y - x < x . y$.

31. Lehrsatz. Ein beliebiger oberer Abschnitt y aus der ersten kleinsten Tangente und der Abschnittstangente bestimmt muß gleich sein

$y = \frac{2\,b\,h . \tan m^0}{(1 - b\,h . \tan m^0) \sin 2\,m^0}$, und ein unterer

$x = \frac{2\,b\,h . \tan m^0}{(1 + b\,h . \tan m^0) \sin 2\,m^0}$, oder auch

$y = \frac{b\,h}{\cos m^0 (\cos m^0 - b\,h . \sin m^0)}$, und $x = \frac{b\,h}{\cos m^0 (\cos m^0 + b\,h . \sin m^0)}$.

Beweis. Nach Lehrsatz 27 ist $x : y = 1 - b\,h . \tan m^0 : 1 + b\,h . \tan m^0$, also auch $y - x : x = 2\,b\,h . \tan m^0 : 1 - b\,h . \tan m^0$ und $\frac{y - x}{x} =$

$= \frac{2\,b\,h . \tan m^0}{1 - b\,h . \tan m^0}$; $\frac{y - x}{x . y} = \frac{2\,b\,h . \tan m^0}{y (1 - b\,h . \tan m^0)} = \sin 2\,m^0$. Daher

$y = \frac{2\,b\,h . \tan m^0}{(1 - b\,h . \tan m^0) \sin 2\,m^0}$. Ebenso ist nun auch

Hosted by Google

$$x : \frac{2\,b\,h\,.\,\tan m^0}{(1 - b\,h\,.\,\tan m^0)\sin 2\,m^0} = 1 - b\,h\,.\,\tan m^0 : 1 + b\,h\,.\,\tan m^0.$$

$$x : \frac{2\,b\,h\,.\,\tan m^0}{\sin 2\,m^0} = 1 : 1 + b\,h\,.\,\tan m^0, \text{ also } x = \frac{2\,b\,h\,.\,\tan m^0}{\sin 2\,m^0\,(1 + b\,h\,.\,\tan m^0)}.$$

Folglich auch $y = \dfrac{2\,b\,h\,.\,\dfrac{\sin m^0}{\cos m^0}}{(1 - b\,h\,.\,\tan m^0)\,2 \sin m^0\,.\,\cos m^0} =$

$$= \frac{b\,h}{(1 - b\,h\,.\,\tan m^0)\cos m^{0\,2}}, \text{ oder } y = \frac{b\,h}{\cos m^0\,(\cos m^0 - b\,h\,.\,\sin m^0)}, \text{ und}$$

$$x = \frac{2\,b\,h\,.\,\dfrac{\sin m^0}{\cos m^0}}{(1 + b\,h\,.\,\tan m^0)\,2 \sin m^0\,.\,\cos m^0} = \frac{b\,h}{(1 + b\,h\,.\,\tan m^0)\cos m^{0\,2}} =$$

$$= \frac{b\,h}{\cos m^0\,(\cos m^0 + b\,h\,.\,\sin m^0)}.$$

Zusatz 1. Es ist $y = \dfrac{b\,h\,.\,\operatorname{cosec} m^0\,.\,\sec m^0}{\cot m^0 - b\,h}$, und

$$x = \frac{b\,h\,.\operatorname{cosec} m^0\,.\sec m^0}{\cot m^0 + b\,h}.$$

Beweis. Da $y = \dfrac{2\,b\,h\,.\,\tan m^0}{(1 - b\,h\,.\,\tan m^0)\sin 2\,m^0}$, so auch

$$y = \frac{2\,b\,h}{(\cot m^0 - b\,h)\,2 \sin m^0\,.\,\cos m^0}, \quad y = \frac{b\,h\,.\operatorname{cosec} m^0\,.\sec m^0}{\cot m^0 - b\,h}, \text{ ebenso}$$

$x = \dfrac{b\,h\,.\operatorname{cosec} m^0\,.\sec m^0}{\cot m^0 + b\,h}$ aus der Gleichung

$$x = \frac{2\,b\,h\,.\,\tan m^0}{(1 + b\,h\,.\,\tan m^0)\sin 2\,m^0}.$$

Zusatz 2. Zwei beliebige an einander liegende Abschnitte x und y, ein unterer und ein oberer verhalten sich, wie die Differenz zur Summe der Cotangente des Bogens und der ersten kleinsten Tangente.

$$x : y = \cot m^0 - b\,h : \cot m^0 + b\,h.$$

Beweis. Aus der Proportion

$x : y = \dfrac{b\,h\,.\operatorname{cosec} m^0\,.\sec m^0}{\cot m^0 + b\,h} : \dfrac{b\,h\,.\operatorname{cosec} m^0\,.\sec m^0}{\cot m^0 - b\,h}$ nach dem vorigen Zusatz folgt dieses unmittelbar.

32. Lehrsatz. Aus dem ersten Abschnitt nach einer (beliebigen) Tangente von m^0 und dieser Tangente läßt sich der zu Ende der Tangente liegende Ab-

Hosted by Google

schnitt x finden, indem $x = \frac{y(1 + \overline{\tan m^0}^2)}{1 + \overline{\tan m^0}^2 + 2y \cdot \tan m^0}$, und aus diesem letzten Abschnitte der $\tan m^0$ und dieser Tangente wird der nächst folgende Abschnitt y gefunden, indem $y = \frac{x(1 + \overline{\tan m^0}^2)}{1 + \overline{\tan m^0}^2 - 2x \cdot \tan m^0}$ sein muß.

Beweis. Es war nach Lehrsatz 22 $bh = \frac{x}{1 + \tan m^0 (\tan m^0 - x)}$ und $bh = \frac{y}{1 + \tan m^0 (\tan m^0 + y)}$, mithin $x + x \cdot \tan m^0 (\tan m^0 + y) = y + y \cdot \tan m^0 (\tan m^0 - x)$; $x + x \cdot \overline{\tan m^0}^2 + x \cdot y \cdot \tan m^0 = y + y \cdot \overline{\tan m^0}^2 - xy \cdot \tan m^0$, oder $x(1 + \overline{\tan m^0}^2 + 2y \cdot \tan m^0) = y + y \cdot \overline{\tan m^0}^2$; $x = \frac{y(1 + \overline{\tan m^0}^2)}{1 + \overline{\tan m^0}^2 + 2y \cdot \tan m^0}$. Ebenso ist auch $x + x \cdot \overline{\tan m^0}^2 = y(1 + \overline{\tan m^0}^2 - 2x \cdot \tan m^0)$, also

$$y = \frac{x(1 + \overline{\tan m^0}^2)}{1 + \overline{\tan m^0}^2 - 2x \cdot \tan m^0}.$$

Anmerkung. Sind x und y die Abschnitte um 45^0, so ist $x = \frac{y(1+1)}{1+1+2y} = \frac{2y}{2+2y} = \frac{y}{1+y}$, oder $da = \frac{as}{1+as}$, und ebenso $y = \frac{x(1+1)}{1+1-2x} = \frac{2x}{2-2x} = \frac{x}{1-x}$, oder $as = \frac{da}{1-da}$, welches mit den früher gefundenen Werthen der Abschnitte von 45^0 übereinkommt, wenn man nemlich für da seinen Werth $\frac{2bh}{1+bh}$, und für as seinen Werth $\frac{2bh}{1-bh}$ setzt.

33. Lehrsatz. $\frac{y-x}{x \cdot y}$, welches nach Lehrsatz 29, Zusatz als gleich $\sin 2m^0$ erwiesen wurde, ist aber auch gleich $\frac{2 \tan m^0}{1 + \overline{\tan m^0}^2}$, oder $\frac{y-x}{x \cdot y} = \frac{2}{\cot m^0 + \tan m^0}$.

Hosted by Google

Beweis. Nach dem vorigen Lehrsatze ist

$y = \frac{x(1 + \tan m^{0\,2})}{1 + \tan m^{0\,2} - 2x \,.\, \tan m^0}$ und Lehrsatz 29 ist $y = \frac{x}{1 - \sin 2m^0 x}$.

Mithin ist auch $(1 - \sin 2m^0 x)(1 + \tan m^{0\,2}) = 1 + \tan m^{0\,2} - 2x \,.\, \tan m^0$, oder $1 + \tan m^{0\,2} - \sin 2m^0 \,.\, x - \sin 2m^0 \,.\, x \,.\, \tan m^{0\,2} = 1 + \tan m^{0\,2} -$ $- 2x \,.\, \tan m^0$; $\sin 2m^0 + \sin 2m^0 \,.\, \tan m^{0\,2} = 2 \tan m^0$; $\sin 2m^0 =$ $= \frac{2 \tan m^0}{1 + \tan m^{0\,2}}$, also auch $\frac{y - x}{x \,.\, y} = \frac{2 \tan m^0}{1 + \tan m^{0\,2}} = \frac{2}{\cot m^0 + \tan m^0}$.

34. Lehrsatz. Es ist $\frac{y - x}{x + y} = bh \,.\, \tan m^0$.

Beweis. Nach Lehrsatz 27 ist $x : y = 1 - bh \,.\, \tan m^0 : 1 + bh \tan m^0$, also auch $x + y : y - x = 2 : 2 \,.\, bh \,.\, \tan m^0$, und $\frac{y - x}{x + y} = bh \,.\, \tan m^0$.

Zusatz. Daher ist $bh = \frac{y - x}{(x + y) \tan m^0}$, und $\tan m^0 = \frac{y - x}{(x + y)\, bh}$.

35. Lehrsatz. Jede beliebige Tangente läßt sich aus zwei gegebenen Abschnitten der ganzen Tangente berechnen, entweder aus dem ersten kleinsten Abschnitt und dem letzten der beliebigen Tangente, oder aus dem ersten und dem nächsten nach der beliebigen Tangente folgenden. Es muß also $\tan m^0 =$ $= \frac{1}{2} x \pm \sqrt{\frac{1}{4} x^2 + \frac{x - bh}{bh}}$, oder $\tan m^0 = -\frac{1}{2} y +$ $\pm \sqrt{\frac{1}{4} y^2 + \frac{y - bh}{bh}}$ sein.

Beweis. Es war nach Lehrsatz 22 $bh = \frac{x}{1 + \tan m^0 (\tan m^0 - x)}$ und $bh = \frac{y}{1 + \tan m^0 (\tan m^0 + y)}$, mithin $bh + bh \,.\, \tan m^0 (\tan m^0 - x) =$ $= x$; $\tan m^0 (\tan m^0 - x) = \frac{x - bh}{bh}$; $\tan m^{0\,2} - \tan m^0 \,.\, x +$ $+ \frac{1}{4} x^2 = \frac{1}{4} x^2 + \frac{x - bh}{bh} = (\tan m^0 - \frac{1}{2} x)^2$, also $\tan m^0 = \frac{1}{2} x +$ $\pm \sqrt{\frac{1}{4} x^2 + \frac{x - bh}{bh}}$. Zweitens ist $1 + \tan m^0 (\tan m^0 + y) = \frac{y}{bh}$;

Hosted by Google

$\tan m^{0\,2} \tan m^0 . y = \frac{y - bh}{bh}$; $\tan m^{0\,2} + \tan m^0 . y + {}^1/_4 y^2 = {}^1/_4 y^2 + \frac{y-bh}{bh}$;

$\tan m^0 = -{}^1/_2 y \pm \sqrt{{}^1/_4 y^2 + \frac{y - bh}{bh}}$.

36. Lehrsatz. Ein beliebiger Abschnitt x kann aus dem nächstfolgenden y und dem ersten bh dergestalt gefunden werden, daß

$$x = \frac{y\left({}^1/_2 y - \sqrt{{}^1/_4 y^2 + \frac{y - bh}{bh}} + \frac{1}{bh}\right)}{\frac{1}{bh}\left({}^1/_2 y - \sqrt{{}^1/_4 y^2 + \frac{y - bh}{bh}}\right)}$$

sein muß, ebenso ein beliebiger Abschnitt y aus dem nächstvorhergehenden x und dem ersten bh bestimmt

$$y = \frac{x\left(\frac{1}{bh} + \left({}^1/_2 x + \sqrt{{}^1/_4 x^2 + \frac{x - bh}{bh}}\right)\right)}{\frac{1}{bh} - \left({}^1/_2 x + \sqrt{{}^1/_4 x^2 + \frac{x - bh}{bh}}\right)}.$$

Beweis. Nach dem vorigen Lehrsatze ist ${}^1/_2 x + \sqrt{{}^1/_4 x^2 + \frac{x - bh}{bh}} =$

$= -{}^1/_2 x + \sqrt{{}^1/_4 y^2 + \frac{y - bh}{bh}}$; also ${}^1/_4 x^2 + \frac{x - bh}{bh} =$

$= \left(-{}^1/_2 y - {}^1/_2 x + \sqrt{{}^1/_4 y^2 + \frac{y - bh}{bh}}\right)^2 =$

$= {}^1/_4 (x + y)^2 - (x + y)\sqrt{{}^1/_4 y^2 + \frac{y - bh}{bh}} + {}^1/_4 y^2 + \frac{y - bh}{bh}$; daher

auch $x\sqrt{{}^1/_4 y^2 + \frac{y - bh}{bh}} + y\sqrt{{}^1/_4 y^2 + \frac{y - bh}{bh}} = {}^1/_4 (x + y)^2 +$

$+ {}^1/_4 y^2 + \frac{y - bh}{bh} - {}^1/_4 x^2 - \frac{x - bh}{bh} = {}^1/_2 xy + {}^1/_2 y^2 + \frac{y}{bh} - \frac{x}{bh}$,

oder $x\left(\frac{1}{bh} - {}^1/_2 y + \sqrt{{}^1/_4 y^2 + \frac{y - bh}{bh}}\right) =$

$= {}^1/_2 y^2 - y\sqrt{{}^1/_4 y^2 + \frac{y - bh}{bh}} + \frac{y}{bh}$; mithin

$$x = \frac{y\left(\frac{1}{bh} + {}^1/_2 y - \sqrt{{}^1/_4 y^2 + \frac{y - bh}{bh}}\right)}{\frac{1}{bh} - \left({}^1/_2 y - \sqrt{{}^1/_4 y^2 + \frac{y - bh}{bh}}\right)}.$$

Hosted by Google

Ebenso da $\frac{1}{2}x + \sqrt{\frac{1}{4}x^2 + \frac{x - bh}{bh}} =$

$= -\frac{1}{2}y + \sqrt{\frac{1}{4}y^2 + \frac{y - bh}{bh}}$, ist auch $\frac{1}{4}y^2 + \frac{y - bh}{bh} =$

$= \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + \sqrt{\frac{1}{4}x^2 + \frac{x - bh}{bh}}\right)^2 =$

$= \frac{1}{4}(x + y)^2 + (x + y)\sqrt{\frac{1}{4}x^2 + \frac{x - bh}{bh}} + \frac{1}{4}x^2 + \frac{x - bh}{bh} =$

$= \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}xy + \frac{1}{4}y^2 + x\sqrt{\frac{1}{4}x^2 + \frac{x - bh}{bh}} +$

$+ y\sqrt{\frac{1}{4}x^2 + \frac{x - bh}{bh}} + \frac{1}{4}x^2 + \frac{x - bh}{bh}$, oder

$y\left(\frac{1}{bh} - \frac{1}{2}x - \sqrt{\frac{1}{4}x^2 + \frac{x - bh}{bh}}\right) =$

$= x\left(\frac{1}{bh} + \frac{1}{2}x + \sqrt{\frac{1}{4}x^2 + \frac{x - bh}{bh}}\right)$. Mithin

$$y = \frac{x\left(\frac{1}{bh} + \frac{1}{2}x + \sqrt{\frac{1}{4}x^2 + \frac{x-bh}{bh}}\right)}{\frac{1}{bh} - \left(\frac{1}{2}x + \sqrt{\frac{1}{4}x^2 + \frac{x - bh}{bh}}\right)}.$$

Anmerkung. Ist hier $x = bh$, also bedeutet y den zweiten Abschnitt, so wird $y = \frac{bh\left(\frac{1}{bh} + \frac{1}{2}bh + \frac{1}{2}bh\right)}{\frac{1}{bh} - \left(\frac{1}{2}bh + \frac{1}{2}bh\right)} = \frac{bh\left(\frac{1}{bh} + bh\right)}{\frac{1}{bh} - bh}$, oder

$y = \frac{bh(1 + \overline{bh}^2)}{1 - \overline{bh}^2}$, welches mit dem früher gefundenen Werthe des zweiten Stückchens der ganzen Tangente übereinstimmt. Ist $x = \frac{bh(1 + \overline{bh}^2)}{1 - \overline{bh}^2}$, also bedeutet y den dritten Abschnitt, so sei $\sqrt{\frac{1}{4}x^2 + \frac{x - bh}{bh}} + \frac{1}{2}x = z$, oder

$$z = \frac{\frac{1}{2}bh(1 + \overline{bh}^2)}{1 - \overline{bh}^2} + \sqrt{\frac{\frac{1}{4}\overline{bh}^2(1 + \overline{bh}^2)^2}{(1 - \overline{bh}^2)^2} + \frac{bh(1 + \overline{bh}^2)}{1 - \overline{bh}^2}} - bh, \text{ und}$$

Hosted by Google

daraus wird man finden $z = \frac{2bh}{1-\overline{bh}^2}$. Mithin wird

$$y = \frac{bh(1+\overline{bh}^2)}{1-\overline{bh}^2}\left(\frac{\frac{1}{bh}+\frac{2bh}{1-\overline{bh}^2}}{\frac{1}{bh}-\frac{2bh}{1-\overline{bh}^2}}\right) = \frac{bh(1+\overline{bh}^2)}{1-\overline{bh}^2}\left(\frac{1-\overline{bh}^2+2\overline{bh}^2}{1-\overline{bh}^2-2\overline{bh}^2}\right),$$

oder $y = \frac{bh(1+\overline{bh}^2)^2}{(1-\overline{bh}^2)(1-3\overline{bh}^2)}$, welches mit dem früher gefundenen Werthe des dritten Stückchens der ganzen Tangente übereinstimmt.

37. Lehrsatz. Der erste kleinste Abschnitt bh, selbst eine Tangente, läßt sich aus jeden zwei beliebigen an einander liegenden Abschnitten x und y der ganzen Tangente von m^0 bestimmen, indem $bh = \frac{xy+\sqrt{x^2y^2=(y-x)^2}}{x+y}$ sein muß.

Beweis. Nach dem vorigen Lehrsatz war ein unterer Abschnitt

$x = \frac{y\left(\frac{1}{bh}+\frac{1}{2}y-\sqrt{\frac{1}{4}y^2+\frac{y-bh}{bh}}\right)}{\frac{1}{bh}\left(\frac{1}{2}y-\sqrt{\frac{1}{4}y^2+\frac{y-bh}{bh}}\right)}$, also $x:y = \frac{1}{bh}+\frac{1}{2}y-$

$-\sqrt{\frac{1}{4}y^2+\frac{y-bh}{bh}}:\frac{1}{bh}-\left(\frac{1}{2}y-\sqrt{\frac{1}{4}y^2+\frac{y-bh}{bh}}\right)$,

$x+y:y = \frac{2}{bh}:\frac{1}{bh}-\left(\frac{1}{2}y-\sqrt{\frac{1}{4}y^2+\frac{y-bh}{bh}}\right)$, also $\frac{2y}{bh(x+y)} =$

$= \frac{1}{bh}-\left(\frac{1}{2}y-\sqrt{\frac{1}{4}y^2+\frac{y-bh}{bh}}\right)$, oder $\frac{1}{2}y-\sqrt{\frac{1}{4}y^2+\frac{y-bh}{bh}} =$

$= \frac{1}{bh}-\frac{2y}{bh(x+y)} = \frac{x-y}{bh(x+y)} = \frac{y-x}{bh(x+y)}$. Daher $\frac{1}{4}y^2 +$

$+\frac{y-bh}{bh} = \left(\frac{1}{2}y+\frac{y-x}{bh(x+y)}\right)^2 = \frac{1}{4}y^2+\frac{y(y-x)}{bh(x+y)}+\left(\frac{y-x}{bh(x+y)}\right)^2$

und $y-bh = \frac{y(y-x)}{x+y}+\frac{1}{bh}\left(\frac{y-x}{x-y}\right)^2$, oder $\left(\frac{y-x}{x+y}\right)^2 =$

$= bh\left(y-\frac{y(y-x)}{x+y}-\overline{bh}^2 = \frac{2bh.x.y}{x+y}-\overline{bh}^2\right.$, oder $\overline{bh}^2-\frac{2bh.xy}{x+y}+$

Hosted by Google

$+\left(\frac{xy}{x+y}\right)^2=\left(\frac{xy}{x+y}\right)^2-\left(\frac{y-x}{x-y}\right)^2$, folglich $bh=\frac{xy}{x+y}\pm$

$\pm\sqrt{\frac{x^2y^2-(y-x)^2}{(x+y)^2}}=\frac{xy\pm\sqrt{x^2y^2-(y-x)^2}}{x+y}$.

38. Lehrſatz. Jede beliebige Tangente von m^0, mit welcher ein Abſchnitt x endet, kann aus dieſem und dem folgenden y dergeſtalt gefunden werden, daß $\tan m^0=\frac{y-x}{xy\pm\sqrt{x^2y^2-(y-x)^2}}$.

Beweis. Nach dem vorigen Lehrſatze war die erſte kleinſte Tangente $bh=\frac{xy\pm\sqrt{x^2y^2-(y-x)^2}}{x+y}$, auch war nach Lehrſatz 34, Zuſatz $bh=\frac{y-x}{(x+y)\tan m^0}$, alſo auch $\frac{y-x}{(x+y)\tan m^0}=$

$=\frac{xy\pm\sqrt{x^2y^2-(y-x)^2}}{x+y}$, daher $\tan m^0=$

$=\frac{y-x}{xy\pm\sqrt{x^2y^2-(y-x)^2}}$.

Zuſatz 1. Iſt die $\tan m^0=1$, ſo iſt alſo auch $y-x=x.y$ und $bh=\frac{y-x}{x+y}$, oder $bh.x+bh.y=y-x$; $bh.x+x=y-bh.y$; $x(bh+1)=y(1-bh)$ mithin $x=\frac{y(1-bh)}{1+bh}$ und $y=\frac{x(1+bh)}{1-bh}$; $da=\frac{as(1-bh)}{1+bh}$, und $as=\frac{da(1+bh)}{1-bh}$, was ſich auch unmittelbar aus dem Beweiſe des Lehrſatzes 4 folgern läßt.

Zuſatz 2. Ebenfalls wenn $\tan m^0=1$ iſt $x=\frac{y}{1+y}$ und $y=$

$=\frac{x}{1-x}$, oder $da=\frac{as}{1+as}$ und $as=\frac{da}{1-da}$. Denn da nach Lehrſatz 1 $bh=\frac{da}{2-da}$, und nach Lehrſatz 4 $bh=\frac{as}{2+as}$, alſo $\frac{da}{2-da}=$

$=\frac{as}{2+as}$, ſo iſt $\frac{1}{\frac{2}{da}-1}=\frac{as}{2+as}$, oder $\frac{1}{\frac{2}{x}-1}=\frac{y}{2+y}$; $\frac{2+y}{y}=$

Hosted by Google

$= \frac{2}{x} - 1$, oder $\frac{2}{x} = \frac{2+y}{y} + 1 = \frac{2+2y}{y}$; $\frac{x}{2} = \frac{y}{2+2y}$; $x = \frac{y}{1+y}$ oder

$da = \frac{as}{1+as}$ und weil $\frac{x}{2-x} = \frac{y}{2+y}$, auch $\frac{x}{2-x} = \frac{1}{\frac{2}{y} - 1}$, oder

$\frac{2}{y} + 1 = \frac{2-x}{x}$, $\frac{2}{y} = \frac{2-x}{x} - 1 = \frac{2-2x}{x}$; $\frac{y}{2} = \frac{x}{2-2x}$;

$y = \frac{x}{1-x}$, oder $as = \frac{da}{1-da}$.

Zusatz 3. Es ist $bh : x = 1 + y : 2 + y$; $bh : da = 1 + as$; $2 + as$, und $bh : y = 1 - x : 2 - x$ oder $bh : as = 1 - da : 2 - da$, bei den Abschnitten um 45^0.

Beweis. Nach dem vorigen Zusatze ist $bh : x = \frac{y}{2+y} : \frac{y}{1+y} =$

$= 1 + y : 2 + y$; ebenfalls ist $bh : y = \frac{x}{2-x} : \frac{x}{1-x} = 1 - x : 2 - x$.

Also ist auch $x - bh : bh = 2 + y - (1 + y) : 1 + y = 1 : 1 + y$. daher

$1 + y = \frac{bh}{x - bh}$, und $y = \frac{bh}{x - bh} - 1 = \frac{2bh - x}{x - bh}$; ebenso $y - bh : bh =$

$= 2 - x - (1 - x) : 1 - x = 1 : 1 - x$, also $1 - x = \frac{bh}{y - bh}$:

$1 - \frac{bh}{y - bh} = x = \frac{y - 2bh}{y - bh}$. Mithin ist auch $da = \frac{as - 2bh}{as - bh}$ und

$as = \frac{2bh - da}{da - bh}$.

Zusatz 4. Es ist $\frac{x^2}{y^2} = \frac{1-x}{1+y}$, also $x : y = \sqrt{1-x} : \sqrt{1+y}$ bei den Abschnitten um 45^0; $da : as = \sqrt{1-da} : \sqrt{1+as}$.

Beweis. Es war $x = \frac{y}{1+y}$, und $y = \frac{x}{1-x}$, also $\frac{x}{y} = \frac{\frac{y}{1+y}}{\frac{x}{1-x}}$;

$\frac{x}{y} = \frac{y(1-x)}{x(1+y)}$; $\frac{x^2}{y^2} = \frac{1-x}{1+y}$, folglich $x : y = \sqrt{1-x} : \sqrt{1+y}$, oder

$da : as = \sqrt{1-da} : \sqrt{1+as}$.

39. Lehrsatz. Bezeichnen x und y die Abschnitte um 15^0, so kann die kleinste Tangente bh aus jedem derselben gefunden werden, indem sowohl

$bh = \frac{x(2 \pm \sqrt{3})}{4 - x}$, als auch $bh = \frac{y(2 \pm \sqrt{3})}{4 + y}$ sein muß.

Hosted by Google

Beweis. Da $bh = \frac{xy \pm \sqrt{x^2y^2 - (y-x)^2}}{x+y}$ und bei 15^0 auch $y = \frac{2x}{2-x}$ ist, weil $y - x = \frac{1}{2}xy$, so ist

$$bh = \frac{x \cdot \frac{2x}{2-x} \pm \sqrt{x^2\left(\frac{2x}{2-x}\right)^2 - \left(\frac{2x}{2-x} - x\right)^2}}{\frac{2x}{2-x} + x}, \text{ oder}$$

$$bh = \frac{2x^2 \pm \sqrt{x^2 \cdot 4x^2 - x^4}}{4x - x^2} = \frac{2x \pm \sqrt{3x^2}}{4-x} = \frac{x(2 \pm \sqrt{3})}{4-x}.$$ Da auch

$$x = \frac{2y}{2+y}, \text{ so ist } bh = \frac{\frac{2y}{2+y} \cdot y \pm \sqrt{\left(\frac{2y}{2+y}\right)^2 y^2 - \left(y - \frac{2y}{2+y}\right)^2}}{y + \frac{2y}{2+y}},$$

$$\text{oder } bh = \frac{2y^2 \pm \sqrt{4y^4 - y^4}}{4y + y^2} = \frac{2y \pm y\sqrt{3}}{4+y} = \frac{y(2 \pm \sqrt{3})}{4+y}.$$

Zusatz. Aus der kleinsten Tangente bh wird der untere Abschnitt x bei 15^0 gefunden, indem $x = \frac{4bh}{2 \pm \sqrt{3} + bh}$, der obere y, indem $y = \frac{4bh}{2 \pm \sqrt{3} \cdot bh}$ sein muß.

Beweis. Da $bh = \frac{x(2 \pm \sqrt{3})}{4-x}$, so $4bh - bh \cdot x = x(2 \pm \sqrt{3})$, oder $4bh = x(2 \pm \sqrt{3} + bh)$; $2 \pm \sqrt{3} + bh$; $\frac{4bh}{2 \pm \sqrt{3} + bh} = x$, und da $bh = \frac{y(2 \pm \sqrt{3})}{4+y}$, so $4bh + y \cdot bh = y(2 \pm \sqrt{3})$;

$4bh = y(2 \pm \sqrt{3} - bh)$; $y = \frac{4bh}{2 \pm \sqrt{3} - bh}$.

40. Lehrsatz. Ganz allgemein ist $\tan m^0 = \frac{y-x}{xy \pm \sqrt{x^2y^2 - (y-x)^2}} = \frac{xy \mp \sqrt{x^2y^2 - (y-x)^2}}{y-x}$, das erstere Vorzeichen der Wurzel findet statt für alle Tangenten unter 45^0, das zweite für alle Tangenten, die größer als die von 45^0 sind.

Beweis. Da, die Abschnitte bei 45^0 ausgenommen, sonst immer $x \cdot y >$

Hosted by Google

$> y - x$ ist, so muß auch, wenn $\tan m^0 < \tan 45^0$ werden soll, das Vorzeichen der Wurzel im Zähler negativ und im Nenner positiv sein. Denn es ist $\frac{x y - \sqrt{x^2 y^2 - (y-x)^2}}{y-x} = \frac{y-x}{x y + \sqrt{x^2 y^2 - (y-x)^2}}$, und nicht gleich $\frac{y-x}{x y - \sqrt{x^2 y^2 - (y-x)^2}}$, und ebenso ist auch $\frac{x y + \sqrt{x^2 y^2 - (y-x)^2}}{y-x} = \frac{y-x}{x y - \sqrt{x^2 y^2 - (y-x)^2}}$ für Tangenten größer als von 45^0. Bei 45^0 werden alle vier Ausdrücke gleich der Einheit, wie auch $\tan 45^0 = 1$ ist.

Zusatz. Es ist $\cot m^0 = \frac{1}{\tan m^0} = \frac{x y \mp \sqrt{x^2 y^2 - (y-x)^2}}{y-x} = \frac{y-x}{x y \mp \sqrt{x^2 y^2 - (y-x)^2}}$.

41. Lehrsatz. Aus jeden zwei an einander liegenden Abschnitten um m^0 kann der Cosinus von m^0 gefunden werden, indem $\cos m^0 = \sqrt{\frac{x y + \sqrt{x^2 y^2 - (y-x)^2}}{2 x y}}$ sein muß.

Beweis. Es ist $\tan m^0 : \sin 2 m^0 = \frac{y-x}{x y + \sqrt{x^2 y^2 - (y-x)^2}} : \frac{y-x}{x y}$,

$\sin 2 m^0 - \tan m^0 : \tan m^0 = \sqrt{x^2 y^2 - (y-x)^2} : x y$, oder

$2 \sin m^0 . \cos m^0 - \frac{\sin m^0}{\cos m^0} : \frac{\sin m^0}{\cos m^0} = \sqrt{x^2 y^2 - (y-x)^2} : x y$;

$2 \cos^2 m^0 - 1 : 1 = \sqrt{x^2 y^2 - (y-x)^2} : x y$; $2 \cos^2 m^0 - 1 = \frac{\sqrt{x^2 y^2 - (y-x)^2}}{x y}$, $2 \cos^2 m^0 = 1 + \frac{\sqrt{x^2 y^2 - (y-x)^2}}{x y}$; $\cos m^0 = \sqrt{\frac{x y + \sqrt{x^2 y^2 - (y-x)^2}}{2 x y}}$. Ist $m^0 = 45^0$, so ist also, weil dann $x^2 y^2 = (y-x)^2$ ist, auch $\cos m^0 = \sqrt{1/2} = 1/2 \sqrt{2}$.

42. Lehrsatz. Ebenso ist $\sin m^0 = \frac{y-x}{\sqrt{2 x y (x y + \sqrt{x^2 y^2 - (y-x)^2}}}$.

Beweis. Es ist $\frac{\sin m^0}{\cos m^0} = \frac{y-x}{x y + \sqrt{x^2 y^2 - (y-x)^2}}$, oder

$\sin m^0 = \frac{(y-x) \cos m^0}{x y + \sqrt{x^2 y^2 - (y-x)^2}} = (y-x) \frac{\sqrt{\frac{xy + \sqrt{x^2 y^2 - (y-x)^2}}{2 x y}}}{x y + \sqrt{x^2 y^2 - (y-x)^2}}$,

Hosted by Google

oder $\sin m^0 = (y-x)\sqrt{\frac{1}{2xy(xy+\sqrt{x^2y^2-(y-x)^2}}} =$

$= \sqrt{\frac{y-x}{2xy(xy+\sqrt{x^2y^2-(y-x)^2})}}$. Ist $m^0 = 45^0$, so ist

$\sin m^0 = \frac{y-x}{\sqrt{2xy \,.\, xy}} = \frac{y-x}{xy}\sqrt{1/2} = 1/2\sqrt{2}$.

Zusatz. Es ist $\sec m^0 = \frac{1}{\cos m^0} = \sqrt{\frac{2xy}{2xy+\sqrt{x^2y^2-(y-x)^2}}}$,

und $\operatorname{cosec}. m^0 = \frac{1}{\sin m^0} = \sqrt{\frac{2xy(xy+\sqrt{x^2y^2-(y-x)^2})}{y-x}}$.

43. Lehrsatz. Wie aus zwei anliegenden Abschnitten, so kann der Sinus des doppelten Bogens auch aus dem ersten und dem letzten Abschnitt der Tangente gefunden werden, indem $\sin 2m^0 = \frac{y-x}{x\,.\,y} =$

$= \frac{2\left(1/2\,x+\sqrt{1/4\,x^2+\frac{x-bh}{bh}}\right)}{x\left(\frac{1}{bh}+1/2\,x+\sqrt{1/4\,x^2+\frac{x-bh}{bh}}\right)}$ ist.

Beweis. Nach Lehrsatz 29 ist $\frac{y-x}{x\,.\,y} = \sin 2m^0$, und nach Lehrsatz 31 ist $x = \frac{2bh\,.\tan m^0}{(1+bh\,.\tan m^0)\sin 2m^0}$, also $\sin m^0 = \frac{2\tan m^0}{x\left(\frac{1}{bh}+\tan m^0\right)}$, da nach Lehrsatz 35 $\tan m^0 = 1/2\,x+\sqrt{1/4\,x^2+\frac{x-bh}{bh}}$, so ist also auch

$\sin 2m^0 = \frac{2\left(1/2\,x+\sqrt{1/4\,x^2+\frac{x-bh}{bh}}\right)}{x\left(\frac{1}{bh}+1/2\,x+\sqrt{1/4\,x^2+\frac{x-bh}{bh}}\right)} =$

$= \frac{2\left(-1/2\,y+\sqrt{1/4\,y^2+\frac{y-bh}{bh}}\right)}{y\left(\frac{1}{bh}-\left(-1/2\,y+\sqrt{1/4y^2+\frac{y-bh}{bh}}\right)\right)}$.

44. Lehrsatz. Es ist der Cosinus des doppelten Bogens aus den beiden Abschnitten der Tangente bestimmt, oder

Hosted by Google

$\cos 2\,m^0 = \frac{\sqrt{x^2y^2-(y-x)^2}}{xy}$, und die Tangente des doppelten Bogens oder

$\tan 2\,m^0 = \frac{y-x}{\sqrt{x^2y^2-(y-x)^2}}$.

Beweis. Es ist $\cos m^0 = \sqrt{1-\sin^2 m^0}$, also

$\cos 2\,m^0 = \sqrt{1-\left(\frac{y-x}{xy}\right)^2}$, oder $\cos 2\,m^0 = \frac{\sqrt{x^2y^2-(y-x)^2}}{xy}$.

Zweitens ist $\tan 2\,m^0 = \frac{\sin 2\,m^0}{\cos 2\,m^0}$, oder $\tan 2\,m^0 = \frac{y-x}{\sqrt{x^2y^2-(y-x)^2}}$.

Zusatz. Es ist $\cot 2\,m^0 = \frac{1}{\tan 2\,m^0} = \frac{\sqrt{x^2y^2-(y-x)^2}}{y-x}$;

$\sec 2\,m^0 = \frac{1}{\cos 2\,m^0} = \frac{xy}{\sqrt{x^2y^2-(y-x)^2}}$; $\operatorname{cosec} 2\,m^0 = \frac{1}{\sin 2\,m^0} =$

$= \frac{xy}{y-x}$.

45. Lehrsatz. Die Differenz der beiden Abschnitte verhält sich zu ihrem Produkte, wie das Produkt der Tangente in die Tangente des doppelten Bogens zu deren Differenz.

$$y-x : xy = \tan 2\,m^0 \,.\, \tan m^0 : \tan 2\,m^0 - \tan m^0.$$

Beweis. Es ist $\tan 2\,m^0 : \tan m^0 = \frac{y-x}{\sqrt{x^2y^2-(y-x)^2}} :$

$: \frac{y-x}{xy \pm \sqrt{x^2y^2-(y-x)^2}} = xy + \sqrt{x^2y^2-(y-y)^2} : \sqrt{x^2y^2-(y-x)^2}$,

mithin $\tan 2\,m^0 - \tan m^0 : \tan m^0 = xy : \sqrt{x^2y^2-(y-x)^2}$, oder

$\tan 2\,m^0 : \frac{\tan 2\,m^0 - \tan m^0}{\tan m^0} = \frac{y-x}{\sqrt{x^2y^2-(y-x)^2}} : \frac{xy}{\sqrt{x^2y^2-(y-x)^2}}$;

$\tan 2\,m^0 \,.\, \tan m^0 : \tan 2\,m^0 - \tan m^0 = y-x : xy$.

Zusatz. Es muß $\infty = \infty - 1$ sein.

Beweis. Wenn in dem Lehrsatze die Tangente von m^0 gleich $\tan 45^0 = 1$ ist, so wird also $y - x = x \,.\, y$, und $\tan 2\,m^0 = \infty$, ebenso $\tan 2\,m^0 \,.\, \tan m^0 =$

$= \tan 2\,m^0 - \tan m^0$, oder $\infty \,.\, 1 = \infty - 1$; $1(\infty + 1) = \infty$; $1 = \frac{\infty}{\infty + 1}$,

Hosted by Google

also $\infty = \infty + 1$, oder $\infty = \infty - 1 = \infty . 1$, daher $\frac{\infty}{\infty} = 1$; $\frac{\infty . 1}{\infty} =$

$= 1 - \frac{1}{\infty} = 1$, mithin $\frac{1}{\infty} = 0$, $1 = 0 . \infty$, $\frac{1}{0} = \infty$, und da $\infty = \infty - 1$, auch $\infty - \infty = 1$.

46. Lehrsatz. Die Differenz zweier anliegenden Abschnitte der ganzen Tangente verhält sich zu dem Produkte derselben, wie der Cosinus zur Cotangente desjenigen Bogens, welcher das Doppelte beträgt des die beiden Abschnitte bildenden.

$$y - x : x y = \cos 2 m^0 : \cot 2 m^0.$$

Beweis. Denn es ist $\cos 2 m^0 : \cot 2 m^0 = \frac{\sqrt{x^2 y^2 - (y - x)^2}}{x y} :$

$: \frac{\sqrt{x^2 y^2 - (y - x)^2}}{y - x}$, oder $\cos 2 m^0 : \cot 2 m^0 = y - x : x y$.

Zusatz. Es ist $\tan 2 m^0 : \sec 2 m^0 = \cos 2 m^0 : \cot 2 m^0 = y - x : x y$. Ist $m^0 = 45_0$, so ist $\cos 2 m^0 = 0$, $\cot 2 m^0 = 0$, $\tan 2 m^0 = \infty$, $\sec 2 m^0 = \infty$. Also $1 = \frac{y - x}{x y} = \frac{0}{0} = \frac{\infty}{\infty}$.

Anmerkung Wenn in der Formel $\tan m^0 = \frac{y - x}{x y \pm \sqrt{x^2 y^2 - (y - x)^2}}$ die $\tan m^0 = 45^0$ ist, so wird der Werth der Wurzel gleich 0, und $\tan 45^0 = \frac{y - x}{x . y \pm 0}$, und bei einer Tangente über 45^0 muß das negative Vorzeichen der Wurzel gebraucht werden. Bei einer Tangente von gerade 45^0 läßt sich also sowohl das negative Vorzeichen gebrauchen, wie das positive, indem sowohl $+ 0 = 0$, als auch $- 0 = 0$ ist. Wendete man nun das negative Vorzeichen an, so würde in der Proportion

$\tan 2 m^0 : \tan m^0 = x y - \sqrt{x^2 y^2 - (y - x)^2} : \sqrt{x^2 y^2 - (y - x)^2}$, woselbst $\tan m^0 = 1$, und $\tan 2 m^0 = \infty$, das Hinterglied zu dem vordern addirt werden müssen, und man hätte:

$$\tan 2 m^0 : \frac{\tan 2 m^0 + \tan m^0}{\tan m^0} = \frac{y - x}{\sqrt{x^2 y^2 - (y - x)^2}} : \frac{x y}{\sqrt{x^2 y^2 - (y - x)^2}},$$

und $\tan 2 m^0 . \tan m^0 : \tan 2 m^0 + \tan m^0 = y - x : x y$. Da nun $y - x = x . y$, so auch $\tan 2 m^0 . \tan m^0 = \tan 2 m^0 + \tan m^0$, oder $\infty . 1 = \infty + 1$.

Hosted by Google

Für Tangenten größer als 45^0 muß das negative Vorzeichen der Wurzel gebraucht werden, und die Formel heißt dann immer

$$\tan 2\,m^0 . \tan m^0 : \tan 2\,m^0 + \tan m^0 = y - x : x\,y.$$

Fernere Auffindung einer Tangente aus gegebenen trigonometrischen Linien, oder aus andern Tangenten. Von drei an einander liegenden Abschnitten Bestimmung des einen aus den beiden andern.

47. Lehrsatz. Es ist immer $\tan m^0 = \frac{\sin 2\,m^0}{1 \pm \cos 2\,m^0} = \frac{1 \mp \cos 2\,m^0}{\sin 2\,m^0}$.

Beweis. Es war $\sin 2\,m^0 = \frac{y - x}{x\,.\,y}$ (Lehrs. 43);

$\tan m^0 = \frac{y - x}{x\,y \pm \sqrt{x^2 y^2 - (y - x)^2}}$ nach Lehrsatz 40, also $\tan m^0 : \sin 2\,m^0 =$

$= x\,y : x\,y \pm \sqrt{x^2 y^2 - (y - x)^2} = 1 : 1 \pm \frac{\sqrt{x^2 y^2 - (y - x)^2}}{x\,y} =$

$= 1 : 1 \pm \cos 2\,m^0$. (Lehrs. 44.) Daher auch $\tan m^0 = \frac{\sin 2\,m^0}{1 \pm \cos 2\,m^0} =$

$= \frac{1 \mp \cos 2\,m^0}{\sin 2\,m^0}$. Das erste Vorzeichen von $\cos 2\,m^0$ findet statt bei Tangenten unter 45^0. Es muß nemlich unter 45^0 jede Tangente kleiner sein als der Sinus des doppelten Bogens nach II. b. Um also in dem Ausdruck $\tan m^0 = \frac{\sin 2\,m^0}{1 \pm \cos 2\,m^0}$ die zweite Seite kleiner zu bekommen als $\sin 2\,m^0$, muß der Divisor größer als die Einheit sein, also das Zeichen positiv werden. Mithin kann für Tangenten unter 45^0 nur gelten $\tan m^0 = \frac{\sin 2\,m^0}{1 + \cos 2\,m^0} = \frac{1 - \cos 2\,m^0}{\sin 2\,m^0}$. Ist aber $m^0 > 45^0$, so wird $\tan m^0$ größer als 1, aber $\sin 2\,m^0 < 1$, $\cos 2\,m^0$ negativ; es muß also $\tan m^0$ mit etwas, was kleiner ist als 1 multiplicirt werden, um $\sin 2\,m^0$ zu erhalten, also im ersteren Ausdruck der Divisor heißen $1 + \cos 2\,m^0$, daher ist auch bei Tangenten über 45^0 die Formel gültig $\tan m^0 = \frac{\sin 2\,m^0}{1 + \cos 2\,m^0} = \frac{1 - \cos 2\,m^0}{\sin 2\,m^0}$.

48. Lehrsatz. Das Produkt der vorletzten Tangente in die überzählige Tangente ist gleich der ganzen Tangente, der $\tan 45^0$ oder $(\tan . 45^0 - x) . (\tan . 45^0 + y) = \tan 45^0 = 1$.

Beweis. Bei 45^0 war $x = \frac{y}{1 + y}$, und $y = \frac{x}{1 - x}$, oder

Hosted by Google

$da = \frac{as}{1+as}$, und $as = \frac{da}{1-da}$ nach Lehrsatz 32. Anmerkung, also ist

$x \cdot y = \frac{x \cdot y}{(1-x)(1+y)}$, $(1-x)(1+y) = \frac{x \cdot y}{x \cdot y} = 1$, d. h. $(\tan(45^0) - x) \cdot (\tan(45^0) + y) = \tan 45^0$.

49. Lehrsatz. Wenn zwei Tangenten beliebiger Differenz gegeben sind, eine kleinere und eine größere, so läßt sich aus denselben solche dritte neue Tangente finden, welche um so viele Grade von der größern verschieden ist, als diese größere von der kleineren ersten. Es muß nemlich, bezeichnet man die erste Tangente mit $\tan a^0$, die zweite gegebene mit $\tan b^0$, die dritte zu suchende mit $\tan c^0$, auch immer, wenn c^0 so viel Grade über b^0 enthalten soll, als b^0 über a^0, die Gleichung stattfinden, daß

$$\tan c^0 = \frac{2\tan b^0 - \tan a^0 (1 - \overline{\tan b^0}^2)}{1 + \tan b^0 (2\tan a^0 - \tan b^0)}.$$

Beweis. Es ist $\tan c^0 = \tan b^0 + y = \tan b^0 +$

$+ \frac{(\tan b^0 - \tan a^0)(1 + \overline{\tan b^0}^2)}{1 + \overline{\tan b^0}^2 - 2\tan b^0 (\tan b^0 - \tan a^0)}$ nach Lehrsatz 32, $\tan c^0 =$

$= \tan b^0 + \frac{\tan b^0 + \overline{\tan b^0}^3 - \tan a^0 - \tan a^0 \cdot \overline{\tan b^0}^2}{1 + \overline{\tan b^0}^2 - 2\tan b^0 (\tan b^0 - \tan a^0)}$; $\tan c^0 =$

$= \frac{\tan b^0 + \overline{\tan b^0}^3 - 2\overline{\tan b^0}^2 (\tan b^0 - \tan a^0) + \tan b^0 + \overline{\tan b^0}^3 - \tan a^0 - \tan a^0 \cdot \overline{\tan b^0}^2}{1 + \overline{\tan b^0}^2 - 2\overline{\tan b^0}^2 + 2\tan a^0 \cdot \tan b^0}$

$$\tan c^0 = \frac{2\tan b^0 - \tan a^0 + \tan a^0 \overline{\tan b^0}^2}{1 - \overline{\tan b^0}^2 + 2\tan a^0 \cdot \tan b^0} = \frac{2\tan b^0 - \tan a^0 (1 - \overline{\tan b^0}^2)}{1 + \tan b^0 (2\tan a^0 - \tan b^0)}.$$

Ist $a^0 = 18^0$, $b^0 = 19^0$, so ist also $c^0 = 20^0$, und es ist:

$$\tan 20^0 = \frac{2\tan 19^0 - \tan 18^0 (1 - \overline{\tan 19^0}^2)}{1 + \tan 19^0 (2\tan 18^0 - \tan 19^0)}.$$

50. Lehrsatz. Aus den zwei letzten Abschnitten x und y bestimmt ist eine solche Tangente

$$\tan c^0 = \frac{y^0 \pm \sqrt{y^2 x^2 - (y-x)^2}}{y - x}.$$

Hosted by Google

Beweis. Denn $\tan c^0 = \tan b^6 + y = \tan m^0 + y = y +$

$+ \frac{x\,y \pm \sqrt{x^2 y^2 - (y-x)^2}}{y-x}$, oder $\tan c^0 = \frac{y^2 \pm \sqrt{y^2 x^2 - (y-x)^2}}{y-x}$.

51. Lehrsatz. Ebenso muß, wenn gegeben ist, eine $\tan b^0$ und eine größere $\tan c^0$, eine kleinste $\tan a^0$, wenn die Differenz zwischen b^0 und a^0 so viel betragen soll, als die zwischen c^0 und b^0, gefunden werden können, indem nemlich

$$\tan a^0 = \frac{2 \tan b^0 - \tan c^0 (1 - \overline{\tan b^0}^2)}{1 + \tan b^0 (2 \tan c^0 - \tan b^0)}.$$

Beweis. Es ist $\tan a^0 = \tan b^0 - x =$

$= \tan b^0 - \frac{(\tan c^0 - \tan b^0)(1 + \overline{\tan b^0}^2)}{1 + \overline{\tan b^0}^2 + 2 (\tan c^0 - \tan b^0) \tan b^0}$; $\tan a^0 =$

$= \frac{\tan b^0 + \overline{\tan b^0}^3 + 2 \overline{\tan b^0}^2 - \tan c^0 - 2 \overline{\tan b^0}^3 - \tan c^0 + \tan c^0 - \overline{\tan b^0}^2 + \tan b^0 + \overline{\tan b^0}^3}{1 - \overline{\tan b^0}^2 + 2 \tan b^0 - \tan c^0}$;

$\tan a^0 = \frac{2 \tan b^0 + \overline{\tan b^0}^2 . \tan c^0 - \tan c^0)}{1 + \tan b^0 (2 \tan c^0 - \tan b^0)}$.

52. Lehrsatz. Aus den zwei zunächst folgenden Abschnitten x und y bestimmt, ist eine solche Tangente

$$\tan a^0 = \frac{x^2 \pm \sqrt{x^2 y^2 - (y-x)^2}}{y-x}.$$

Beweis. Da $\tan c^0 = \frac{y^2 \pm \sqrt{x^2 y^2 - (y-x)^2}}{y-x}$, so ist also auch

$\tan a^0 + x + y = \frac{y^2 \pm \sqrt{x^2 y^2 - (y-x)^2}}{y-x}$;

$\tan a^0 = \frac{(y-x)(-y-x) + y^2 \pm \sqrt{x^2 y^2 - (y-x)^2}}{y-x}$,

$\tan a^0 = \frac{x^2 \pm \sqrt{x^2 y^2 - (y-x)^2}}{y-x}$.

53. Lehrsatz. Sind zwei verschiedene Tangenten bekannt, $\tan c^0$ und $\tan a^0$, so kann daraus diejenige Tangente gefunden werden, deren Gradenanzahl sich in der Mitte befindet der Graden der gegebenen Tangenten. Es ist nemlich immer, wenn die Differenz zwischen b^0 und a^0 so viel betragen soll, als die zwischen c^0 und b^0

Hosted by Google

$$\tan b^0 = \frac{\tan a^0 . \tan c^0 - 1 \pm \sqrt{(1 + \tan^2 a^0)(1 + \tan^2 c^0)}}{\tan a^0 + \tan c^0}.$$

Beweis. Da $\tan a^0 = \frac{2 \tan b^0 - \tan c^0 + \tan^2 b^0 . \tan c^0}{1 + \tan b^0 (2 \tan c^0 - \tan b^0)}$, so ist

$$\tan a^0 + 2 \tan a^0 . \tan b^0 . \tan c^0 - \tan a^0 . \tan^2 b^0 = 2 \tan b^0 - \tan c^0 + \\ + \tan^2 b^0 . \tan c^0,$$

$$\tan^2 b^0 (\tan c^0 + \tan a^0) + 2 \tan b^0 (1 - \tan a^0 . \tan c^0) = \tan a^0 + \tan c^0;$$

$$\tan^2 b^0 + 2 \tan b^0 \left(\frac{1 - \tan a^0 . \tan c^0}{\tan a^0 + \tan c_0}\right) + \left(\frac{1 - \tan a^0 . \tan c^0}{\tan a^0 + \tan c^0}\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{1 - \tan a^0 . \tan c^0}{\tan a^0 + \tan c^0}\right)^2 + \left(\frac{\tan a^0 + \tan c^0}{\tan a^0 + \tan c^0}\right). \text{ Also ist}$$

$$\tan b^0 = \frac{\tan a^0 . \tan c^0 - 1 \pm \sqrt{(1 - \tan a^0 . \tan c^0)^2 + (\tan a^0 + \tan c^0)^2}}{\tan a^0 + \tan c^0};$$

$$\tan b^0 = \frac{\tan a^0 . \tan c^0 - 1 \pm \sqrt{1 + \tan^2 a^0 . \tan^2 c^0 + \tan^2 a^0 + \tan^2 c^0}}{\tan a^0 + \tan c^0}$$

$$\tan b^0 = \frac{\tan a^0 . \tan c^0 - 1 \pm \sqrt{\sec^2 c^0 + \tan^2 a^0 . \sec^2 c^0}}{\tan a^0 + \tan c^0}$$

$$\tan b^0 = \frac{\tan a^0 . \tan c^0 - 1 \pm \sqrt{\sec^2 c^0 . \sec^2 a^0}}{\tan a^0 + \tan c^0} =$$

$$= \frac{\tan a^0 . \tan c^0 - 1 \pm \sec a^0 . \sec c^0}{\tan a^0 + \tan c^0}.$$

Ist $a^0 = 18^0$ und $c^0 = 20^0$, so ist also $b^0 = 19^0$, und

$$\tan 19^0 = \frac{\tan 18^0 . \tan 20^0 - 1 \pm \sec 18^0 . \sec 20^0}{\tan 18^0 + \tan 20^0}.$$

Zusatz 1. Es ist $\tan b^0 = \frac{1 - \cos (a^0 + c^0)}{\sin (a^0 + c^0)}$, wenn die Differenz zwischen b^0 und a^0 so groß ist, wie die zwischen c^0 und b^0.

Beweis. Es ist $\tan b^0 = \frac{\sin a^0 . \sin c^0 - \cos a^0 . \cos c^0 + 1}{\sin a^0 . \cos c^0 + \cos a^0 . \sin c^0} =$

$$= \frac{1 - \cos (a^0 + c^0)}{\sin (a^0 + c^0)}.$$

Hosted by Google

Also auch $\tan 19^0 = \frac{1 - \cos(18^0 + 20^0)}{\sin(18^0 + 20^0)} = \frac{1 - \cos 38^0}{\sin 38^0}$.

Zusatz 2. Es ist $\tan b^0 = \tan a^0 + x = x + \frac{x^2 \mp \sqrt{x^2 y^2 - (y - x)^2}}{y - x}$,

oder $\tan b^0 = \frac{x y \pm \sqrt{x^2 y^2 - (y - x)^2}}{y - x}$, welches mit dem früheren nach Lehrsatz 40 für $\tan m^0$ gefundenen Werthe übereinkommt, nur daß statt der Vorzeichen $\mp$ bei der Wurzel hier $\pm$ steht. Da also für alle Tangenten unter 45^0 das Zeichen $-$ gebraucht werden muß, so muß auch bei der Tangente von a^0 gleich der Tangente von b^0 weniger x, und der Tangente von c^0 gleich $\tan b^0 + y$, gleich $\tan a^0 + x + y$ für Tangenten unter 45^0 das negative Vorzeichen statt haben. Es ist also $\tan a^0 = \frac{x^2 - \sqrt{x^2 y^2 - (y - x)^2}}{y - x}$;

$\tan b^0 = \frac{x y - \sqrt{x^2 y^2 - (y - x)^2}}{y - x}$ und $\tan c^0 = \frac{y^2 - \sqrt{x^2 y^2 - (y - x)^2}}{y - x}$

für Tangenten unter 45^0.

54. Lehrsatz. Sind zwei beliebige an einander liegende Abschnitte der ganzen Tangente bekannt, so kann daraus immer der dritte zunächst folgende Abschnitt gefunden werden, indem

$$z = \frac{y^2 (y^2 \mp 2\sqrt{x^2 y^2 - (y + x)^2}}{y (x^2 - y^2 + 2 x y) \mp 2 x \sqrt{x^2 y^2 - (y - x)^2}}$$ sein muß.

Beweis. Da nach Lehrsatz 32 war $y = \frac{x (1 + \tan^2 m^0)}{1 + \tan^2 m^0 - 2 x \tan m^0}$,

so $z = \frac{y (1 + \tan^2 c^0)}{1 + \tan c^0 (\tan c^0 - 2 y)}$. Setzt man hier statt $\tan c^0$ den gleichen Werth aus x und y bestimmt, nemlich $\tan c^0 = \frac{y^2 \mp \sqrt{x^2 y^2 - (y - x)^2}}{y - x}$, so erhält man am Ende für z den im Lehrsatz angegebenen Ausdruck.

55. Lehrsatz. Der zweien an einander liegenden Abschnitten y und z zunächst vorhergehende x kann bestimmt werden, indem

$$x = \frac{y^2 (2 + y z \mp \sqrt{y^2 z^2 - (z - y)^2})}{2 z - y (y z \mp \sqrt{y^2 z^2 - (z - y)^2})}.$$

Hosted by Google

Beweis. Es war $x = \frac{y(1 + (\tan c^0 - y)^2}{1 + \tan c^0 - y^2} =$

$= \frac{y(1 + (\tan c^0 - y)^2}{1 + (\tan c^0 - y)^2 + 2y(\tan c^0 - y)}$, nach Lehrsatz 32. Wenn man auch hier statt $\tan c^0$ den gleichen Werth aus z und y bestimmt setzt, so erhält man

$$x = \frac{y^2(2 + yz \mp \sqrt{y^2z^2 - (z - y)^2})}{2z - y(yz \mp \sqrt{y^2z^2 - (z - y)^2})}.$$

Berechnung der Tangenten in annähernden Werthen durch die vermittelst der Abschnitte gefundenen Größenbestimmungen.

Aus dem Verhältniß der Abschnitte zu einander, daß jeder folgende bis 45^0 kleiner sein muß, als das Doppelte des ersten (Lehrs. 2. Zus. 1), hatten wir schon eine Größenbestimmung gefunden (Zus. 3), nemlich daß $bh > \frac{1}{2n-1}$ sei. Sei hier $n = 6$ zum Beispiel, ist also die ganze Tangente bis 45^0 in 6 Abschnitte getheilt, so wird $bh > \frac{1}{11}$ oder $bh > 0{,}0909090$. Diese Größenbestimmung ist näher als durch die Winkel oder Bogen, welche den Tangenten entsprechen. Denn der dazu gehörige Winkel oder Bogen wäre $\frac{1/2\,R}{6}$ oder $\frac{1/2\,Q}{6}$, also immer $\frac{1}{12} = 0{,}0833333$. Es ist aber nun $bh > 0{,}0909090$ näher bestimmt, als $bh > 0{,}0833333$. Aber in welchem Verhältnisse nun jeder folgende Abschnitt zu dem nächst vorhergehenden in genauerem Maße zunimmt, gibt uns der folgende Satz im Allgemeinen.

I. Wenn die Zunahme eines Abschnitts der ganzen Tangente immer größer sein mußte, als die Zunahme des nächst vorhergehenden Abschnitts, indem man von unten an oder von 0^0 an rechnet bis 45^0, so wächst ein solcher folgender Abschnitt in Beziehung zu dem frühern in dem Maß, daß das Wievielfache, um welches der frühere Abschnitt zugenommen hatte, bei jenem ein Größeres sein muß. War also ein mter Abschnitt ein $\frac{e}{q}$ eines nächst vorhergehenden, so muß der folgende $m + 1$te Abschnitt ein Mehreres als ein $\frac{e}{q}$ des mten Abschnittes sein.

Beweis. Nach Lehrsatz 7 verhält sich das erste Stückchen der ganzen

Hosted by Google

Tangente zum zweiten $bh : hg = 1 - \overline{bh}^2 : 1 + \overline{bh}^2$, und das zweite zum dritten $hg : gf = 1 - 3\,\overline{bh}^2 : 1 + \overline{bh}^2$. Der Exponent der ersten Proportion ist $\frac{1-\overline{bh}^2}{1+\overline{bh}^2}$, und der der zweiten $\frac{1-3\,\overline{bh}^2}{1+\overline{bh}^2}$, der Zähler des zweiten ist noch um $2\,\overline{bh}^2$ vermindert. Nun läßt sich zeigen, daß bei folgenden Proportionen des dritten Stückes zum vierten, des vierten zum fünften und so weiter, die Exponenten so beschaffen sind, daß immer etwas mehr noch, um sie zu erhalten, als $2\,\overline{bh}^2$ von dem Zähler des vorigen Exponenten abgezogen werden muß. Also ist bei einer dritten Proportion des dritten Stückes zum vierten der Exponent etwas kleiner als $\frac{1-5\,\overline{bh}^2}{1+\overline{bh}^2}$, bei einer vierten kleiner als $\frac{1-7\,\overline{bh}^2}{1+\overline{bh}^2}$ u. s. w.

Zuerst nemlich ist, wenn $bh = \tan 7\frac{1}{2}^0$ oder $bh = 0{,}1316525$, $\overline{bh}^2 = \tan\overline{7\frac{1}{2}}^0 = 0{,}0173323$, und $5 \times \overline{bh}^2 = 0{,}0866618$, daher $1 - 5\,\overline{bh}^2 = 0{,}9133381$. Wäre nun auch drittes Stück zum vierten $III : IV = 1 - 5\,\overline{bh}^2 : 1 + \overline{bh}^2$, so müßte also $III \times (1 + \overline{bh}^2) = IV \,.\, (1 - 5\,\overline{bh}^2)$ sein. Aber es ist $III \,.\, (1 + \overline{bh}^2) = 0{,}1462643 \times 0{,}0173323 = 0{,}1487993$, und $IV \,.\, (1 - 5\,\overline{bh}^2) = 0{,}1489989$, also ist dieses $0{,}1489989 > 0{,}1487993$. Daher muß in der Proportion, die sein soll, das dritte Glied zu groß sein, und also etwas weiteres noch als $5\,\overline{bh}^2$ von 1 abgezogen werden. Ebenso würde, wenn eine Proportion $IV : V = 1 - 7\,\overline{bh}^2 : 1 + \overline{bh}^2$ richtig wäre, auch wieder $IV \,.\, (1 + \overline{bh}^2) = V \,.\, (1 - 7\,\overline{bh}^2)$ sein. Aber es ist zuerst $IV \,.\, (1 + \overline{bh}^2) = 0{,}1631367 \,.\, 1{,}0173323 = 0{,}1659642$, und $V \,.\, (1 - 7\,\overline{bh}^2) = 0{,}1899767 \,.\, 0{,}8786733 = 0{,}1609272$. Da also $0{,}1669272 > 0{,}1659642$, so ist wieder im dritten Gliede der Proportion etwas zu wenig, nemlich $7\,\overline{bh}^2$ abgezogen. Mithin ist auch ein viertes Stückchen $IV > \frac{III \,.\, (1 + \overline{bh}^2)}{1 - 5\,\overline{bh}^2}$, und ein fünftes $V > \frac{IV \,.\, (1 + \overline{bh}^2)}{1 - 7\,\overline{bh}^2}$, weil bei beiden der Nenner zu groß ist. Nennte man also das erste Stückchen oder $bh = x$, so würde die Summe aller Stücke oder $S > x + \frac{x\,(1 + x^2)}{1 - x^2} +$

Hosted by Google

$$+\frac{x(1+x^2)^2}{(1-x^2)(1-3x^2)}+\frac{x(1+x^2)^3}{(1-x^2)(1-3x^2)(1-5x^2)}+$$

$$+\frac{x(1+x^2)^4}{(1-x^2)(1-3x^2)(1-5x^2)(1-7x^2)}+\text{etc.}$$ Bezeichnet man hier wieder x oder die Tangente b h mit a, Secante Quadrat $(1+x^2)$ mit e, und $1-x^2$ mit q, ferner $2x^2$ mit α, so wird also $1-3x^2=q-\alpha$, dann $1-5x^2=q-\alpha-$ einem Uebrigen, welches sammt dem über $5x^2$ Hinzuaddirten, damit das vierte Stück richtig werde, mit β bezeichnet wird. Ebenso werde $1-7x^2$, und was daran noch fehlt zur Richtigkeit bezeichnet mit $q-\alpha-\beta-\gamma$. Daraus entsteht folgende Gleichung:

$$S=a+a.\frac{e}{q}+a.\frac{e^2}{q(q-\alpha)}+a.\frac{e^3}{q(q-\alpha)(q-(\alpha+\beta))}+$$

$$+a.\frac{e^4}{q(q-\alpha)(q-(\alpha+\beta))(q-(\alpha+\beta+\gamma))}\text{etc.}=1.$$

Weil hierselbst die Abzüge $5x^2$, $7x^2$ und so weiter etwas immer mehr zu klein werden, so folget daraus, daß β etwas größer als α, und $\beta+\gamma$ größer als 2α sein müsse. Also ist auch:

$$S>a+a.\frac{e}{q}+a.\frac{e^2}{q(q-\alpha)}+\frac{a.e^3}{q(q-\alpha)(q-2\alpha)}+$$

$$+\frac{a.e^4}{q(q-\alpha)(q-2\alpha)(q-3\alpha)}\text{etc.}$$

Eben so ist auch in der Gleichung $\frac{e}{q-x}>\frac{e}{q}$, daher auch $\frac{e^2}{q(q-\alpha)}>$ $>\frac{e^2}{q^2}$. Folglich wenn der Exponent für das zweite Glied $\frac{e}{q}$ war, so ist der folgende Exponent für das dritte Glied größer als $\frac{e}{q}$, nemlich $\frac{e}{q-\alpha}$, ebenso der Exponent für das vierte Glied größer als $\frac{e}{q-\alpha}$, weil $\frac{e}{q-(\alpha+\beta)}>$ $>\frac{e}{q-\alpha}$ ist, und so fort.

II. In der Gleichung des vorigen Satzes:

$$S=a+a.\frac{e}{q}+\frac{a.e^2}{q(q-\alpha)}+\frac{a.e^3}{q(q-\alpha)(q-(\alpha+\beta))}+$$

$$+\frac{a.e^4}{q(q-\alpha)(q-(\alpha+\beta))(q-(\alpha+\beta+\gamma))}\text{etc.}=1$$ muß jedesmal das Produkt der Faktoren im Divisor gleich sein der $n-1$ten Potenz des Exponen-

Hosted by Google

ten e multiplizirt mit der Summe aus dem Produkt des ersten Gliedes in die gehörende Tangente und der Einheit, und diese Summe dividirt durch die Summe des Quadrates der Tangente und der Einheit. Oder es muß sein:

$$q\,(q-\alpha)\,(q-(\alpha+\beta)) = \frac{e^3\,(a\,.\,\tan m^0+1)}{\overline{\tan m^0}^2+1}, \text{ und}$$

$$q\,(q-\alpha)\,(q-(\alpha+\beta))\,(q-(\alpha+\beta+\gamma))\ldots. = \frac{e^{n-1}\,(a\,.\,\tan m^0+1)}{\overline{\tan m^0}^2+1}.$$

Beweis. Da nach Lehrsatz 35 $\tan m^0 = {}^1\!/_2\,x + \sqrt{{}^1\!/_4\,x^2+\frac{x-bh}{bh}}$, so ist also auch eine Tangente bis nach dem vierten Abschnitte oder

$$\tan m^0 = \frac{{}^1\!/_2\,a\,.\,e^3}{q\,(q-\alpha)\,(q-(\alpha+\beta))} +$$

$$+\sqrt{\frac{{}^1\!/_4\,a^2\,.\,e^6}{q\,(q-\alpha)\,(q-(\alpha+\beta))^2} + \frac{a\,.\,e^3}{q\,(q-\alpha)\,(q-(\alpha+\beta))}} - a;$$

$$\tan m^0 = \frac{{}^1\!/_2\,a\,.\,e^3}{q\,(q-\alpha)\,(q-(\alpha+\beta))} + \frac{1}{q\,(q-\alpha)\,(q-(\alpha+\beta))} \times$$

$$\times\sqrt{{}^1\!/_4\,a^2\,.\,e^6 + e^3\,.\,q\,(q-\alpha)\,(q-(\alpha+\beta)) - (q\,(q-\alpha))\,(q-(\alpha+\beta))^2};$$

$$(\tan m^0\,.\,q\,(q-\alpha)\,(q-(\alpha+\beta)) - {}^1\!/_2\,a\,.\,e^3)^2 =$$

$$= {}^1\!/_4\,a^2\,.\,e^6 + e^3\,(q\,(q-\alpha))\,(q-(\alpha+\beta)) - (q\,(q-\alpha))\,(q-(\alpha+\beta))^2;$$

$$\overline{\tan m^0\,.\,q\,(q-\alpha)\,(q-(\alpha+\beta))}^2 - \tan m^0\,.\,q\,(q-\alpha)\,(q-(\alpha+\beta))\,.\,a\,.\,e^3 +$$

$$+ {}^1\!/_4\,a^2\,.\,e^6 = {}^1\!/_4\,a^2\,.\,e^6 + e^3\,.\,q\,(q-\alpha)\,(q-(\alpha+\beta)) - (q(q-\alpha))\,(q-(\alpha+\beta))^2;$$

$$\overline{(q(q-\alpha)(q-(\alpha+\beta))}^2\,(\overline{\tan m^0}^2+1) - e^3\,.\,q(q-\alpha)(q-(\alpha+\beta))\,(a\,.\tan m^0+1) = 0;$$

$$\overline{q\,(q-\alpha)\,(q-(\alpha+\beta))}^2 - \frac{q\,(q-\alpha)\,(q-(\alpha+\beta))\,e^3\,(a\,.\,\tan m^0+1)}{\overline{\tan m^0}^2+1} +$$

$$+\frac{{}^1\!/_4\,e^6\,(a\,.\,\tan m^0+1)^2}{\overline{(\tan m^0}^2+1)^2} = \frac{{}^1\!/_4\,e^6\,(a\,.\,\tan m^0+1)^2}{\overline{(\tan m^0}^2+1)^2}.$$ Mithin ist nun auch:

$$q\,(q-\alpha)\,(q-(\alpha+\beta)) - \frac{{}^1\!/_2\,e^3\,(a\,.\,\tan m^0+1)}{\overline{\tan m^0}^2+1} =$$

$$= \sqrt{\frac{{}^1\!/_4\,e^6\,(a\,.\,\tan m^0+1)^2}{\overline{(\tan m^0}^2+1)^2}};$$

Hosted by Google

$$q\,(q-\alpha)\,(q-(\alpha+\beta)) = \frac{{}^1/_2\, e^3\,(a\,.\,\tan m^0+1)}{\tan m^{0\,2}+1} + \frac{{}^1/_2\, e^3\,(a\,.\,\tan m^0+1)}{\tan m^{0\,2}+1} =$$

$$= \frac{e^3\,(a\,.\,\tan m^0+1)}{\tan m^{0\,2}+1}.$$ Ist also der Divisor des nten Gliedes statt des vierten zu bestimmen, so wird statt e^3 gesetzt e^{n-1}, und übrigens verfahren wie vorher. Dadurch muß man also auch erhalten:

$$q\,(q-\alpha)\,(q-(\alpha+\beta))\,(q-(\alpha+\beta+\gamma))\,\ldots\,. = \frac{e^{n-1}\,(a\,.\,\tan m^0+1)}{\tan m^{0\,2}+1}.$$

Zusatz. Es muß im vierten Gliede die Differenz

$$q-\left(\alpha+\frac{e^3\,(a\,.\,\tan m^0+1)}{(\tan m^{0\,2}+1)\,(q-(q-\alpha))}\right) = \beta \text{ sein.}$$

Beweis. Da $q\,(q-\alpha)\,(q-(\alpha+\beta)) = \frac{e^3\,(a\,.\,\tan m_0+1)}{\tan m^{0\,2}+1}$, so ist

$$q-\alpha-\beta = \frac{e^3\,(a\,.\,\tan m^0+1)}{(\tan m^{0\,2}+1)\,(q\,(q-\alpha))}, \text{ also}$$

$$q-\left(\alpha+\frac{e^3\,(a\,.\,\tan m^0+1)}{(\tan m^{0\,2}+1\,(q\,(q-\alpha))}\right) = \beta.$$

III. Wenn die Tangente von 45^0 gleich 1 gesetzt wird, und n die Anzahl solcher Bogenstücke bis zu 45^0 bezeichnet, zu deren einem b h eine beliebige Tangente unter 45^0 ist, so muß diese Tangente $b\,h > \frac{1}{1{,}5\,n-0{,}5}$ sein.

Beweis. Man erhält durch fortgesetzte Theilungen bei einem letzten Stücke unter 45^0, indem man dieses letzte Stück gleich 2 b h annimmt, folgende Glieder

1 : 0,5 : 0,25 : 0,125 : 0,0625 : 0,03125 : 0,015625 : 0,0078125 : 0,00390625 :
0,001953125 : 0,0009765625 : 0,00048828125 : 0,000244140625 :
0,0001220703125 : 0,00006103515625 : 0,000030517578125 :
0,0000152587890605 : 0,00000762939453125 : 0,00000381469726562 5 :
0,0000019073486328125 : 0,00000095367431640625 :
0,00000047683715820 3125 : 0,00000023841857910 15625 :
0,00000011920928955078125 : 0,00000005960464477539 0625 :
0,00000002980232387695 3125 : 0,00000001490116119384765625 :
0,00000000745058059692 3828725 : 0,00000000372529029846 19140625 :
0,00000000186264514923095703125 :
0,00000000093132257461547 8515625 :

Hosted by Google

0,00000000046566128730773925781 25 :
0,00000000023283064365386962890625 :
0,00000000011641532182693481445 3125 :
0,00000000005820766091346740722656 25 :
0,00000000002910383045673703613281 25.

Da dieſes 36 Glieder ſind, und das zweite $\frac{1}{2}$ des erſten, das dritte $\frac{1}{2}$ des zweiten, oder $\frac{1}{4}$ des erſten, $\frac{1}{2^2}$ des erſten, ſo iſt alſo das 36ſte Glied $\frac{1}{2^{35}}$, d. h. $\frac{1}{34359738368}$ von dem erſten Gliede, der Einheit. Iſt nun umgekehrt 0,00000000002910383045673703613281 25 gleich a gleich dem erſten Gliede einer arithmetiſchen Progreſſion, und iſt die beſtändige Differenz = d ebenſo groß als a, ſo muß es bis zum letzten Gliede auch 34359738368 Glieder geben. Da aber die Summe einer arithmetiſchen Progreſſion, oder

$S = a \,.\, n + \frac{(n-1)\,n \,.\, d}{2}$, ſo iſt

$S = 34359738368 \,.\, 0{,}00000000002910383045673703613281 25 +$

$+ 34359738367 \,.\, \frac{34359738368}{2}$.

. 0,00000000002910383045673703613281 25, oder auch

$S = 1 + 34359738367 \,.\, 0{,}5 = 17179869184{,}5$. Da nun jedes Glied noch ein ganzes b h, eine Einheit, enthält außer dieſer Zunahme über b h, ſo müſſen zu obigem Werthe noch 34359738368 hinzuaddirt werden. Dadurch erhält man nun:

$17179869184{,}5 + 34359738368 = 51539607552{,}5$. Alſo iſt:

$\frac{n-1}{34359738368} \times 51539607552{,}5\,b\,h + b\,h > 1$, oder

$(n-1) \,.\, 1{,}50000000001\,b\,h + b\,h > 0$; $1{,}5\,b\,h \,.\, n - 0{,}5\,b\,h > 1$, und

$b\,h > \frac{1}{1{,}5\,n - 0{,}5}$.

Beiſpiel. Bedeutet $n = 6$, ſo wird alſo die Tangente

$b\,h > \frac{1}{9 - 0{,}5}$ oder $b\,h > \frac{1}{8{,}5}$; $b\,h > 0{,}1176470$.

IV. Bezeichnet n die Anzahl beliebiger gleicher Bogenſtücke bis zu 45°, und iſt die ganze Tangente gleich 1, ſo muß jede Tangente unter 45°, welche zu einem jener Bogenſtücke gehört, kleiner ſein, oder

$b\,h < \frac{1}{1{,}055555555554\,n - 0{,}055555555554}$.

Hosted by Google

Beweis. Die Summe einer geometrischen Progression ist

$S = \frac{a \,.\, e^n - a}{e - 1}$, also die Summe jener frühern Reihe, deren erstes Glied

$a = 0{,}000000000029103830456733703613281 25$, deren Anzahl $n = 36$, und Exponent $e = 2$ ist:

$S = 0{,}000000000029103830456733703613281 25 \,.\, 2^{36} -$

$- 0{,}000000000029103830456733703613281 25,$

$S = 2 - 0{,}000000000029103830456733703613281 25$ oder

$S = 1{,}999999999970896169543266296386718 75$. Da hierzu noch die Ganzen kommen, so lassen sich alle Stücke der ganzen Tangente nach einem Mehr oder Minder also bezeichnen:

$\frac{n-1}{36} \times 37{,}999999999970896169543266296386718 75\, b\, h + b\, h$. Daß aber diese Summe weniger als 1 sein muß, also auch:

$(n - 1)\, 1{,}055555555554\, b\, h + b\, h < 1$, ergibt sich aus Folgendem:

Es war nemlich in I. bewiesen, daß wenn der Exponent eines frühern Abschnittes $\frac{e}{q}$ war, der des folgenden größer sein mußte als $\frac{e}{q}$. Dasselbe läßt sich aber auch von den bloßen Zunahmen zeigen, wenn also die Ganzen, die Eins, fehlen. Bei $7\frac{1}{2}{}^0$ ist $\overset{-2}{\sec}{}^0 = 1{,}0173323$, also ein letzter Abschnitt fast $b\, h \overset{-2}{\sec}$ nach Lehrs. 22, Zusatz, die Zunahme mithin 0,0173323. So ist die Zunahme bei 15^0 gleich 0,0717967 und bei 30^0 gleich 0,3333333. In einer geometrischen Proportion $7\frac{1}{2} : 15 = 15 : 30$, oder der Progression $7\frac{1}{2} : 15 : 30$ ist der beständige Exponent 2. Aber bei den Zunahmen 0,0173323 : 0,0717967 : 0,3333333 wächst immer der Exponent, indem $0{,}0173323 \times \frac{9}{2} = 0{,}0779953$ größer als 0,0717967, aber $0{,}0717967 \times \frac{9}{2} = 0{,}3230851$, also kleiner als 0,3333333 ist. Es muß also auch die Summe aller Zunahmen von 36 wirklichen Stücken größer sein, als die Summe jener geometrischen Progression, deren erstes Glied

$a = 0{,}000000000029103830456733703613281 25$, und letztes 1 ist. Denn da das letzte Glied immer fast 1 ist, dafür also gehalten werden kann, so muß bei den wirklichen Stücken, wenn der Exponent für das folgende Stück $\frac{1}{2}$ ist oder 0,5, der Exponent für das drittletzte Stück auch kleiner sein als $\frac{1}{2}$. Man erhielt also das 36ste Stück oder das erste größer als

0,000000000029103830456733703613281 25. Und umgekehrt wird dieses für ein erstes Stück einer Reihe gehalten, so muß, um auf ein letztes fast 1 oder 1 zu kommen, der erste Exponent kleiner als 2 sein. Ist also allgemein das

Hosted by Google

vorletzte Glied $\frac{1}{n}$ des letzten, so muß das drittletzte, weil weniger als mit n multiplicirt dieses zweite erhalten wird, auch größer als $\frac{1}{n^2}$ sein. Denn es ist $\frac{1\,(n-x)}{n\,(n-x)} = \frac{1}{n}$, also zweiter Exponent $\frac{1}{(n-x)\,n}$. Daher auch der 36ste größer als $\frac{1}{n^{35}}$ nemlich $\frac{1}{n^{35}(1-z)}$ u. s. w. Da dadurch also jedes Glied der 36 Stücke näher kommt dem frühern, so muß auch die Summe der Zunahme der Stücke größer sein, als die Summe der geometrischen Progression. Also mit den hinzuaddirten Ganzen ist

$$\frac{n-1}{36} \times 37{,}999999999708961695432662963867 1875\,bh + bh < 1,$$

oder $(n-1)\,1{,}055555555554\,bh + bh < 1$, also

$$bh < \frac{1}{1{,}055555555554\,n - 0{,}055555555554}.$$

Beispiel ist $n = 6$, so ist $bh < \frac{1}{6{,}333333333328 - 0{,}055555555554}$,

$bh < \frac{1}{6{,}277777777773}$; $bh < 0{,}1592920$. Es war auch nach dem vorigen Satze $bh > 0{,}1176470$; mithin liegt der Werth der Tangente von $7\frac{1}{2}^0$ zwischen 0,117 und 0,159, der wirkliche Werth ist 0,1316525.

Wie hier jede beliebige Tangente unter 45^0 durch die Größenbestimmungen eines Mehr und eines Minder annähernd berechnet werden kann, so lassen sich auch solche Größenbestimmungen auffinden für eine beliebige Tangente unter einer Tangente, die kleiner ist als 45^0.

V. Für Tangenten unter 30^0 ist $bh > \frac{3-\sqrt{3}}{2n}$ und $bh < {}^3/_2\left(\frac{3-\sqrt{3}}{2n}\right)$,

also auch $bh > \frac{1{,}2679491}{2n}$; $bh < {}^3/_2\left(\frac{1{,}2679491}{2n}\right)$.

Beweis. a) daß $bh > \frac{3-\sqrt{3}}{2n}$.

Da die Tangente von 30^0 oder eb gleich ist ${}^1/_3\sqrt{3}$, so ist also das übrige Stück bis zur ganzen Tangente, der von 45^0 $ae = 1 - {}^1/_3\sqrt{3}$. Da nun jeder Abschnitt kleiner ist als das Doppelte des ersten bh, kleiner als $2\,bh$, so muß auch ae oder $1 - {}^1/_3\sqrt{3} < 2\,bh\,.\,{}^1/_3\,n$; also $\frac{3-\sqrt{3}}{2n} < bh$, oder $bh > \frac{3-\sqrt{3}}{2n}$.

Hosted by Google

b) daß $bh < {}^3/_2 \left(\frac{3-\sqrt{3}}{2n}\right)$.

Da nach Lehrs. 19, Zusatz $2ed > {}^4/_3 bh$, so auch alle folgenden Abschnitte, deren es von e aus bis a, bis 45° noch $^1/_3 n$ geben muß. Mithin $^4/_3 bh . {}^1/_3 n + {}^1/_3 \sqrt{3} < 1$; oder $^4/_3 bh < \frac{1 - {}^1/_3 \sqrt{3}}{{}^1/_3 n}$, also $bh < {}^3/_2 \left(\frac{3-\sqrt{3}}{2n}\right)$.

Beispiel. Ist $n = 6$, so ist $bh > \frac{3-\sqrt{3}}{2.6}$; $bh > \frac{1{,}2679491}{12}$, oder $bh > 0{,}1056624$, und $bh < {}^3/_2 (0{,}1056624)$; $bh < \frac{0{,}3169872}{2}$, oder $bh < 0{,}1584963$. Der Unterschied des Mehr und Minder beträgt 0,053, da der Unterschied der aus der Tangente von 45° genommenen Größenbestimmungen nur $0{,}159 - 0{,}117 = 0{,}042$ betrug. Dieses kommt daher, weil bei den Größenbestimmungen aus der Tangente von 30° die weitern Verhältnisse der einzelnen Abschnitte unter einander unberücksichtigt blieben. Nehmen wir aber diese Verhältnisse mit in Betracht, so wird sich ein um so Genaueres ergeben, je kleiner die Tangente ist, unter welcher die beliebigen Tangenten durch Größenbestimmungen gesucht werden.

VI. Aus dem gegebenen Werthe einer Tangente von $22^1/_2{}^0$ kann jede andere beliebige Tangente bis auf die zwei ersten Decimalzahlen leicht gefunden werden, indem erstens jede beliebige Tangente bis zu $22^1/_2{}^0$ $bh > \frac{0{,}7629741}{n - 0{,}1580170}$, und zweitens $bh < \frac{0{,}8206051}{n - 0{,}0188836}$, das heißt also auch $bh > \frac{0{,}7629741}{(n-1),8419829}$, und $bh < \frac{0{,}8206051}{(n-1),9811163}$ sein muß.

Beweis. Die Tangente von $22^1/_2{}^0$ ist 0,41421356237309. Das Quadrat dieser Tangente 0,171572875253805, folglich auch $\overline{\sec 22^1/_2{}^0}^2 = 1{,}171572875253805$. Die Zunahme beträgt also von einer beliebigen kleinern Tangente bis zu $22^1/_2{}^0$ fast $bh \overline{\sec}^2$, so daß bei einer großen Anzahl Stücke ein letztes unter $22^1/_2{}^0$ fast $1{,}171572875253805\, bh$ sein kann. Bildete man nun solcher Stücke gleicher Bogenabschnitte nach einer Tangente bh bis zu $22^1/_2{}^0$ gleich 2^{35} das ist 34359738368, so muß ein unterstes, d. h. ein erstes arithmetisch proportionirt anzunehmendes Stück auch $\frac{0{,}171572875253805}{2^{35}} = 0{,}000000000004993427$ sein. Also ist $S = an + \frac{(n-1)n.d}{2}$, oder $S = 0{,}171572875253805 + 17179869183{,}5 \times 0{,}171572875253805$,

Hosted by Google

$S = 2947599552{,}297 + 0{,}171 = 2947599552{,}468$. Dazu kommen die Ganzen 34359738368, und alsdann ist:

$\frac{1/2\,n-1}{34359738368} \times 37307337920{,}468\,bh + bh > 0{,}4142135$,

$1{,}0857864\,bh\,(1/2\,n-1) + bh > 0{,}4142135$. Also auch

$bh\,.\,0{,}5428932\,n - 0{,}0857864\,bh > 0{,}4142135$; oder

$bh > \frac{0{,}4142135}{0{,}5428932\,n - 0{,}0857764}$; $bh > \frac{0{,}7629741}{n - 0{,}1580176}$, oder

$bh > \frac{0{,}7629741}{(n-1){,}8419829}$.

Zweitens ist bei geometrisch proportionirt anzunehmenden Stücken, deren erstes Glied 0,000000000004993427, deren Exponent gleich 2, letztes Glied gleich 0,171572875253805, Anzahl 36, auch

$S = \frac{a\,.\,e^n - a}{e-1} = 0{,}343145750507610 = 0{,}000000000004993427$, oder

$S = 0{,}3431457505$. Also wenn die Ganzen hinzuaddirt werden,

$\frac{1/2\,n-1}{36} \times 36{,}34314575\,bh + bh < 0{,}4142135$;

$(1/2\,n-1)\,.\,1{,}0095318\,bh + bh < 0{,}4142135$; $0{,}5047659\,bh\,.\,n -$

$- 0{,}0095318\,bh < 0{,}4142135$.

Also $bh < \frac{0{,}4142135}{0{,}5047659\,n - 0{,}0095318}$; $bh < \frac{0{,}8206051}{n - 0{,}0188836}$; oder

$bh < \frac{0{,}8206051}{(n-1){,}9811163}$.

Beispiel. Wäre die $\tan 20^0$ zu suchen, so ist also $n = \frac{45^0}{20} = 2\frac{5}{20}$,

oder $n = 2{,}25$, und $bh > \frac{0{,}7629741}{2{,}0919829}$, $bh > 0{,}3647133$, und

$bh < \frac{0{,}8206051}{2{,}2311163}$, $bh < 0{,}3678002$. Also muß die Tangente $bh = 0{,}36$ sein. Es ist auch wirklich $\tan 20^0 = 0{,}36397$. Daß aber hier in der Mehrbestimmung $bh > 0{,}3647133$ schon die dritte Decimalziffer zu groß erscheint, ergibt sich aus der ungenauen Rechnung mit den Decimalen.

VII. A. Aus der Tangente von 15^0 findet man bei einer Anzahl von n Abschnitten, daß eine beliebige Tangente unter 15^0 größer als $\frac{0{,}7499999}{n - 0{,}2009617}$, und zweitens kleiner als $\frac{0{,}8660254}{n}$ ist.

Hosted by Google

Beweis. Da die Tangente von 15^0 gleich $2-\sqrt{3}$ ist, und jeder Abschnitt bis zu 15^0 kleiner als $\sec\overline{15^0}^2 . \mathfrak{b}\mathfrak{h}$ (Lehrs. 22. Zusatz) oder kleiner als $1{,}0717967\,\mathfrak{b}\mathfrak{h}$, da ferner die Anzahl der Stücke außer $\mathfrak{b}\mathfrak{h}$ bis zu 15^0 noch $\frac{1}{3}\mathfrak{n}-1$ sein muß, so ist $(\frac{1}{3}\mathfrak{n}-1).1{,}0717967\,\mathfrak{b}\mathfrak{h}+\mathfrak{b}\mathfrak{h}>2\sqrt{3}$,

$\mathfrak{b}\mathfrak{h}(1+1{,}0717967(\frac{1}{3}\mathfrak{n}-1))>2-\sqrt{3}$;

$\mathfrak{b}\mathfrak{h}>\frac{0{,}2679491}{0{,}3572655\,\mathfrak{n}-0{,}0717967}$, das heißt also $\mathfrak{b}\mathfrak{h}>\frac{0{,}7499999}{\mathfrak{n}-0{,}2009617}$.

Zweitens ist auch, da jeder Abschnitt nach 15^0 größer sein muß, als $1{,}0717967\,\mathfrak{b}\mathfrak{h}$, ebenso $2-\sqrt{3}+\frac{1}{3}\mathfrak{n}.1{,}0717967\,\mathfrak{b}\mathfrak{h}<\frac{1}{3}\sqrt{3}$ (Lehrs. 22 Zusatz).

Also $1{,}0717967\,\mathfrak{b}\mathfrak{h}<\frac{\frac{1}{3}\sqrt{3}-2+\sqrt{3}}{\frac{1}{3}\mathfrak{n}}$, also $\mathfrak{b}\mathfrak{h}<\frac{\frac{4}{3}\sqrt{3}-2}{\frac{1}{3}\mathfrak{n}.1{,}0717967}$;

$\mathfrak{b}\mathfrak{h}<\frac{4\sqrt{3}-6}{1{,}0717967\,\mathfrak{n}}$; $\mathfrak{b}\mathfrak{h}<\frac{0{,}9282032}{1{,}0717967\,\mathfrak{n}}$; $\mathfrak{b}\mathfrak{h}<\frac{0{,}8660254}{\mathfrak{n}}$.

Beispiel. Ist $\mathfrak{n}=6$, also die $\tan 7\frac{1}{2}^0$ zu suchen, so ist erstens

$\mathfrak{b}\mathfrak{h}>\frac{0{,}749999}{6-0{,}2009616}$, $\mathfrak{b}\mathfrak{h}<\frac{0{,}7499999}{5{,}7990582}$, das ist $\mathfrak{b}\mathfrak{h}<0{,}1293316$, und

zweitens $\mathfrak{b}\mathfrak{h}<\frac{0{,}8660254}{6}$, $\mathfrak{b}\mathfrak{h}<0{,}1443375$.

VII. B. 1. Jede Tangente unter 15^0 muß, wenn die Anzahl der Abschnitte der ganzen Tangente von 45^0 $\mathfrak{n}$ ist, größer sein als

$$\frac{0{,}7627738}{\mathfrak{n}-0{,}1532883}.$$

Beweis. Da es außer der kleinsten Tangente $\mathfrak{b}\mathfrak{h}$ noch $\frac{1}{3}\mathfrak{n}-1$ Stücke geben muß bis zu 15^0, die Stücke aber immer zunehmen von einem Werth gleich $\mathfrak{b}\mathfrak{h}$ bis zu dem $1{,}0717967\,\mathfrak{b}\mathfrak{h}$, so muß auch, theilte man die Anzahl der außer $\mathfrak{b}\mathfrak{h}$ noch übrigen Stücke in zwei Theile, die Zunahme in dem untersten Theil $\frac{\frac{1}{3}\mathfrak{n}-1}{2}$, weil eben Stücke, je weiter von $\mathfrak{b}\mathfrak{h}$ entfernt, desto mehr zunehmen, weniger betragen als die in dem letzten Theil. In dem spätern Theile muß also die Zunahme mehr betragen als die Hälfte. Da aber kein Stück $1{,}0717967\,\mathfrak{b}\mathfrak{h}$ sein kann, so ist also auch:

$\frac{\frac{1}{3}\mathfrak{n}-1}{2}.1{,}0717967\,\mathfrak{b}\mathfrak{h}+\frac{\frac{1}{3}\mathfrak{n}-1}{2}.\frac{1{,}0717967}{2}\,\mathfrak{b}\mathfrak{h}+\mathfrak{b}\mathfrak{h}>2-\sqrt{3}$, oder

$\frac{\frac{1}{3}\mathfrak{n}-1}{2}.1{,}0717967\,\mathfrak{b}\mathfrak{h}+\frac{\frac{1}{3}\mathfrak{n}-1}{2}.1{,}0358983\,\mathfrak{b}\mathfrak{h}+\mathfrak{b}\mathfrak{h}>2-\sqrt{3}$;

$\frac{\frac{1}{3}\mathfrak{n}-1}{2}.2{,}1076950\,\mathfrak{b}\mathfrak{h}+\mathfrak{b}\mathfrak{h}>2-\sqrt{3}$;

Hosted by Google

$(^1/_3\,n-1)\,.\,1{,}0538475\,b\,h+b\,h>2-\sqrt{3}$,
$b\,h\,(0{,}3512825\,n-0{,}0538475)>2-\sqrt{3}$;
$b\,h>\frac{0{,}2679491}{0{,}3512825\,n-0.0538475}$ oder $b\,h>\frac{0{,}7627738}{n-0{,}1532883}$.

Beiſpiel. Wenn $n=6$, ſo iſt $b\,h>\frac{0{,}7627738}{5{,}8467116}$; $b\,h>0{,}1304621$.

Wenn man auf die vorgeſchriebene Weiſe die Anzahl der Stücke außer $b\,h$ bis zu 15^0 oder $^1/_3\,n-1$ in 16,128,2048,32768 Theile theilt, wodurch alſo auch verhältnißmäßig die Zunahme getheilt wird, welche dennoch immer für jedes einzelne Stück zu groß bleibt, ſo erhält man nach und nach als Größenbeſtimmung der kleinſten erſten Tangente:

a) bei 16 Theilen $b\,h>\frac{0{,}7743647}{n-0{,}1100303}$, und

b) bei 128 Theilen $b\,h>\frac{0{,}7757805}{n-0{,}1047467}$, dann

c) bei 2048 Theilen $b\,h>\frac{0{,}7759775}{n-0{,}1040117}$, endlich

d) bei 32768 Theilen $bh>\frac{0{,}7759897}{n-0{,}1039658}$.

Beweis. Da die Hälfte von 0,0717967 gleich $0{,}0358983^1/_2$, das Viertel $0{,}0179491^3/_4$, das Achtel $0{,}0089745^7/_8$, das Sechzehntel $0{,}0044872^{15}/_{16}$ iſt, ſo heißen alſo zuerſt die 16 Theile mit ihren Beſtimmungen

$\frac{^1/_3\,n-1}{16}\,.\,1{,}0717967\,bh+\frac{^1/_3\,n-1}{16}\,1{,}0673095\,b\,h+\frac{^1/_3\,n-1}{16}\,.$
$.\,1{,}0628223\,bh+\frac{^1/_3\,n-1}{16}\,.\,1{,}0583346\,b\,h+\frac{^1/_3\,n-1}{16}\,.\,1{,}0538474\,b\,h+$
$+\frac{^1/_3\,n-1}{16}\,.\,1{,}0493600\,bh+\frac{^1/_3\,n-1}{16}\,.\,1{,}0448728\,b\,h+$
$+\frac{^1/_3\,n-1}{16}\,.\,1{,}0402865\,b\,h+\frac{^1/_3\,n-1}{16}\,.\,1{,}0358983\,b\,h+$
$+\frac{^1/_3\,n-1}{16}\,.\,1{,}0314108\,bh+\frac{^1/_3\,n-1}{16}\,.\,1{,}0269236\,bh+$
$+\frac{^1/_3\,n-1}{16}\,.\,1{,}0224363\,bh+\frac{^1/_3\,n-1}{16}\,.\,1{,}0179491\,b\,h+$
$+\frac{^1/_3\,n-1}{16}\,.\,1{,}0124617\,bh+\frac{^1/_3\,n-1}{16}\,.\,1{,}0089745\,b\,h+$
$\frac{^1/_3\,n-1}{16}\,.\,1{,}0044872\,bh>2-\sqrt{3}$. Oder es iſt

Hosted by Google

$\frac{1/3\,n-1}{16}\,.\,16{,}6091723\,bh + bh > 2-\sqrt{3}$. Also ist auch

$bh > \frac{2-\sqrt{3}}{\frac{1/3-1}{16}\,.\,16{,}6091723+1}$; $bh > \frac{0{,}2679491}{(1/3\,n-1)\,.\,1{,}0380732+1}$;

$bh > \frac{0{,}2679491}{0{,}3460244\,n-0{,}0380732}$; $bh > \frac{0{,}7743647}{n-0{,}1100303}$.

Ist $n=6$, so ist $bh > \frac{0{,}7743647}{5{,}8899696}$; $bh > 0{,}1314$.

Zweitens bei den 128 Theilen sind weitere Hälften der Hälften $0{,}0022436^{19}/_{32}$; $0{,}0011218^{15}/_{64}$; $0{,}0005609^{15}/_{128}$. Folglich da der Werth des kleinsten Stückes angenommen wird, als betrüge er $1{,}0005609^{15}/_{128}\,bh$, der folgende Werth des nächsten Stückes $1+2.0{,}0005609^{15}/_{128}$, der Drittfolgende $1+3.0{,}0005609^{15}/_{128}$; und es nun 128 Theile geben muß, so muß der Werth des ersten größten Stückes $1+128\,.\,0{,}0005609^{15}/_{128}$ betragen. Mithin da die Summe aller Glieder von 1, 2, 3 u. s. w. bis 127, 128 oder $S = a\,.\,n + \frac{(n-1)\,n\,.\,d}{2}$ ausmacht, also 8256 beträgt, so gibt $8256 \times 0{,}000569^{15}/_{128}$ außer den Ganzen die Summe aller Größenbestimmungen der Stücke außer bh bis zu 15^0. Dazu kommen also noch die ganzen Zahlen, welche bei jedem Stücke 1 sind. Also ist $128 + 4{,}6308871 = 132{,}6308871$ die Werthbestimmung aller Stücke. Mithin ist $\frac{1/3\,n-1}{128}\,.\,132{,}6308871\,bh + bh > 2-\sqrt{3}$, oder $(1/3\,n-1)\,.\,1{,}0361788\,bh + bh > 2-\sqrt{3}$. Daher ist

$bh > \frac{2-\sqrt{3}}{0{,}3453929\,n-0{,}0361788}$; $bh > \frac{0{,}2679491}{0{,}3453929\,n-0{,}03361788}$;

$bh > \frac{0{,}7757805}{n-0{,}1047467}$. Ist also $n=6$, so ist $bh > \frac{0{,}7757805}{5{,}8952532}$;

$bh > 0{,}1315940$.

Drittens sind die weitern Theilungen bis zu 2048 Theilen von 128 an $0{,}0002804^{143}/_{256}$; $0{,}0001402^{143}/_{512}$; $0{,}0000701^{143}/_{1024}$; $0{,}0000350^{1167}/_{2048}$; die Summe aller Zahlen von 1 bis 2048 ist

$S = a\,.\,n + \frac{(n-1)\,n\,.\,d}{2} = 1\,.\,2048 + \frac{(2048-1)\,2048\,.\,1}{2} =$

$= 2048 + 2047\,.\,1024$; $S = 2048 + 2096128 = 2098176$. Also ist auch: $2098176 \times 0{,}0000350^{1167}/_{2048} = 73{,}4361600 + 0{,}1195582 = 73{,}5557182$. Dazu kommen die Ganzen 2048, also ist $2048 + 73{,}5557182 = 2121{,}5557182$ die Werthbestimmung der gesammten Stücke. Also

Hosted by Google

$\frac{1/3\,n-1}{2048}$. 2121,5557182 b h + b h > $2-\sqrt{3}$;

$(1/3\,n-1)$. 1,0359158 b h + b h > $2-\sqrt{3}$, also

b h > $\frac{0{,}2679491}{0{,}3453052\,n-0{,}0359158}$, b h > $\frac{0{,}7759775}{n-0{,}1040117}$. Ist n = 6, so

b h > $\frac{0{,}7759775}{5{,}8959882}$, also b h > 0,13161.

Viertens. Wenn man das Quadrat der Secante von 15° auf 1,0717967699999 bestimmt, so gibt eine 15te Theilung der Theilung für die bloßen Decimalzahlen $1{,}0000021910635\frac{12319}{32768}$. Nun ist S = 1 . 32768 + + $\frac{32768-1}{2}$. 32768 = 32768 + 32767 . 16384, S = 32768 + + 536854528 = 536887296. Diese Summe multiplicirt mit 0,0000021910635 beträgt 1176, 3541578. Dazu noch $\frac{12319}{327680000000000000} \times 536887296 = 0{,}0000201$. Dieses mit den Ganzen 32768 zu Obigem addirt macht 33944,3541779. Mithin ist

$\frac{1/3\,n-1}{32768}$. 33944,3541779 b h + b h > $2-\sqrt{3}$. Also

b h > $\frac{0{,}2679491}{0{,}5452998\,n-0{,}3358994}$; b h > $\frac{0{,}7759897}{n-0{,}1039658}$. Ist n=6, so ist

b h > $\frac{0{,}7759897}{5{,}8960341}$, oder b h > 0,1316121.

VII. B. 2. Eine Tangente unter 15°, welche so eben erwiesen wurde größer als $\frac{0{,}7759897}{n-0{,}1039658}$, muß ebenfalls kleiner sein als

$$\frac{0{,}7966976}{n-0{,}0266828}.$$

Beweis. Die durch die 15te Theilung des Quadrates der Tangente von 15° erhaltenen Zahlen 0,000002191 sind auch das erste Glied einer geometrischen Progression, wo der Exponent e = 2, die Anzahl n = 16 ist, also

S = $\frac{0{,}000002191\,.\,2^{16}-0{,}000002191}{2-1}$, oder

S = 0,000002191 . 65536 − 0,000002191 = 0,1435871. Da hiezu die Ganzen 16 kommen, so hat man $\frac{1/3\,n-1}{16} \times 16{,}1435871$ bh+bh<2−$\sqrt{3}$. Mithin $(1/3\,n-1)$. 1,0089741 b h + b h < $2-\sqrt{3}$, oder

Hosted by Google

$0{,}3363247\,n\,.\,bh - 0{,}0089741\,bh < 0{,}2679491$, also

$bh < \frac{0{,}2679491}{0{,}3363247\,n - 0{,}0089741}$; $bh < \frac{0{,}7966976}{n - 0{,}0266828}$, oder auch

$bh < \frac{0{,}7966976}{(n-1),9733171}$. Ist $n = 6$, so $bh < \frac{0{,}7966976}{5{,}9733171}$;

$bh < 0{,}1333760$.

Es war auch $bh > 0{,}1316121$, also muß $bh = 0{,}13$ sein.

VIII. Für Tangenten unter $7\frac{1}{2}^0$ gilt als Größenbestimmung

1) $bh > \frac{0{,}7831284}{n - 0{,}0515516}$; 2) $bh < \frac{0{,}7882075}{n - 0{,}0129779}$, oder

$bh > \frac{0{,}7831284}{(n-1),9484483}$; $bh < \frac{0{,}7882075}{(n-1),9870220}$.

Beweis. Es ist $\tan 7\frac{1}{2}^0 = 0{,}1316525$, und $\tan^{-2} 7\frac{1}{2}^0 = 0{,}0173323$, also $\sec^{-2} 7\frac{1}{2}^0 = 1{,}0173323$. Wird nun das zunächst unten an $7\frac{1}{2}^0$ liegende Stück bei einer Eintheilung von 32768 Theilen als gleich genommen $1{,}0173323\,bh$, so erhält man durch weitere Theilung $1{,}0086662$; $1{,}0043331 : 1{,}0021665\frac{1}{2} : 1{,}0010832\frac{3}{4} : 1{,}0005416\frac{3}{8} : 1{,}0002708\frac{3}{16} : 1{,}0001354\frac{3}{32} : 1{,}0000677\frac{3}{64} : 1{,}0000338\frac{67}{128} : 1{,}0000169\frac{67}{256} : 1{,}0000084\frac{323}{512} : 1{,}0000042\frac{323}{1024} : 1{,}0000021\frac{323}{2048} : 1{,}0000010\frac{2371}{4096} : 1{,}0000005\frac{2371}{8192}$. Dieses letzte Glied $0{,}0000005\frac{2371}{8192}$ gleich $0{,}00000052894287$ multiplicirt mit 536887296, der Summe aller Zahlen von 1 bis 32768 gibt 283,9827072. Dazu die Ganzen 32768 addirt gibt 33051.9827072. Diesem gemäß ist also

$\frac{\frac{1}{6}\,n - 1}{32768} . 33051{,}9827072\,bh + bh > 0{,}1316525$;

$1{,}0086664\,(\frac{1}{6}\,n - 1)\,bh + bh > 0{,}1316525$. Also

$0{,}1681110\,n\,.\,bh - 0{,}0086664\,bh > 0{,}1316525$, daher

$bh > \frac{0{,}1316525}{0{,}1681110\,n - 0{,}0086664}$; $bh > \frac{0{,}7831284}{n - 0{,}0515516}$;

$bh > \frac{0{,}7831284}{(n-1),9484483}$.

Eben so ist zweitens nach geometrischer Progression

$S = 0{,}00000052894287 \times 2^{16} - 0{,}00000052894287$;

$S = 0{,}00000052894287\,.\,65536 - 0{,}00000052894287$;

$S = 0{,}03466479992832 - 0{,}00000052894287$;

$S = 0{,}03466427098545$. Dazu die Ganzen addirt, und alsdann ist

$\frac{\frac{1}{6}\,n - 1}{16} \times 16{,}0346642\,bh + bh < 0{,}1316525$,

Hosted by Google

$(\frac{1}{6}\,n-1).1{,}0021665\,bh+bh<0{,}1316525$, oder
$0{,}1670277\,n.bh-0{,}0021665\,bh<0{,}1316525$. Also ist
$bh<\frac{0{,}1316525}{0{,}1670279\,n-0{,}0021665}$; $bh<\frac{0{,}7882075}{n-0{,}0129779}$;
$bh<\frac{0{,}7882075}{(n-1){,}9870220}$.

Ist $n=12$, also ein Theil $^{45}/_{12}{}^0=3\frac{3}{4}{}^0=3^0\,45'$, so ist die Tangente eines solchen Bogenstückes erstens $bh>\frac{0{,}7831284}{11{,}9484483}$, oder $bh>0{,}0655422$, dann $bh<\frac{0{,}7882075}{11{,}9870220}$, oder $bh<0{,}0657550$, also muß bh oder $\tan 3^0\,45'=0{,}065$ sein.

IX. Da die Größenbestimmungen der Tangente um so genauer zutreffen müssen, je kleiner die Winkel, wonach sie genommen sind, werden, so würden also nach vorausgesetztem Werthe der Tangente von $7\frac{1}{2}{}^0$ für die Tangenten unter $3\frac{3}{4}{}^0$, $1\frac{7}{8}{}^0$ und endlich $^{15}/_{16}{}^0$ zuletzt das Mehr und Minder ziemlich bei Tangenten unter einem Grade bis auf die sieben ersten Decimalzahlen übereinkommen, wenn nicht die Rechnung durch die Nichtberücksichtigung der folgenden Decimalen unsicher wäre.

Für Tangenten unter $3\frac{3}{4}{}^0$ kommen die Mehr- und Minderbestimmungen überein bis auf 4 Decimalen nach den Formeln $bh>\frac{0{,}7845880}{(n-1){,}9742564}$; $bh<\frac{0{,}7860922}{(n-1){,}9935606}$; für Tangenten unter $1\frac{7}{8}{}^0$ treffen 5 Decimalen überein nach den Formeln $bh>\frac{0{,}7853169}{(n-1){,}9871476}$, $bh<\frac{0{,}7856278}{(n-1){,}9967868}$; für Tangenten unter $^{15}/_{16}{}^0=0^0\,56'\,15''$ kommen auch nur 5 Decimalen überein wegen der unsichern Rechnung durch die ausgelassenen folgenden Decimalen; die Formeln aber sind $bh>\frac{0{,}7854300}{(n-1){,}9935736}$, $bh<\frac{0{,}7855092}{(n-1){,}9988768}$.

Beweis. Um die Tangenten von $3\frac{3}{4}{}^0$, $1\frac{7}{8}{}^0$, $^{15}/_{16}{}^0$ zu finden, und daraus die Werthbestimmungen, werden zunächst aus unsern vorhandenen Sinus und Cosinus von 15^0 die von $7\frac{1}{2}{}^0$, von $3\frac{3}{4}{}^0$, von $1\frac{7}{8}{}^0$ gesucht. Da also der $\sin 15^0=0{,}2588189$ und $\cos 15^0=0{,}9659256$ war, so ist

$$\sin 7\tfrac{1}{2}{}^0=\sqrt{\frac{1-0{,}9659256}{2}}=\sqrt{\frac{0{,}0340743}{2}}=\sqrt{0{,}0170371}=$$

$$=0{,}130526;\ \cos 7\tfrac{1}{2}{}^0=\sqrt{\frac{1+0{,}9659256}{2}}=\sqrt{0{,}9829628}=0{,}9914448;$$

Hosted by Google

$\sin 3^3/_4{}^0 = \sqrt{\frac{1-0{,}9914448}{2}} = \sqrt{\frac{0{,}0085551}{2}} = \sqrt{0{,}0042775} =$

$= 0{,}0654025$; $\cos 3^3/_4{}^0 = \sqrt{0{,}9957224} = 0{,}9978584.$

$\sin 1^7/_8{}^0 = \sqrt{\frac{0{,}0021415}{2}} = \sqrt{0{,}0010707} = 0{,}0327215.$

$\cos 1^7/_8{}^0 = \sqrt{0{,}9989292} = 0{,}9994644.$ Mithin ist auch

$\tan 3^3/_4{}^0 = \frac{\sin 3^3/_4{}^0}{\cos 3^3/_4{}^0} = 0{,}0655428$; (genauer 0,0658434);

$\tan 1^7/_8{}^0 = \frac{\sin 1^7/_8{}^0}{\cos 1^7/_8{}^0} = \frac{0{,}0327215}{0{,}9994644} = 0{,}0327390;$

$\tan {}^{15}/_{15}{}^0 = \frac{1-\cos 1^7/_8{}^0}{\sin 1^7/_8{}^0} = \frac{0{,}0005355}{0{,}0327215} = 0{,}0163653 = \tan 0^0\,56'\,15''.$

Da also $\tan 3^3/_4{}^0 = 0{,}0655428$, so ist $\tan^2 3^3/_4{}^0 = 0{,}0042958$, mithin $S = 0{,}0042958 + 70{,}3810584 = 70{,}3853543.$ Dazu die Ganzen 32768 addirt, und dann hat man $\frac{^1/_{12}\,n-1}{32765} \times 32838{,}3853543\,bh + bh > 0{,}0655428.$

$(^1/_{12}\,n-1).\,1{,}0021479\,bh + bh > 0{,}0655428;$

$0{,}0835123\,n.\,bh - 0{,}0021479\,bh > 0{,}0655428.$

$bh > \frac{0{,}0655428}{0{,}0835123\,n - 0{,}0021479}$; $bh > \frac{0{,}7845880}{n - 0{,}0257435}$;

$bh > \frac{0{,}7845880}{(n-1),9742564}.$

Ebenso für die Minderbestimmung ist $S = 0{,}0085917 - 0{,}0000013$, indem $\tan^2$ oder $0{,}0655428^2$ dividirt durch 2^{15} gleich 0,0000013 ist.

Also ist $S = 0{,}0085919.$ Mithin $\frac{^1/_{12}\,n-1}{16}.\,16{,}0085915\,bh + bh <$

$< 0{,}0655428$; $(^1/_{12}\,n-1).\,1{,}0005369\,bh + bh < 0{,}0655428$, oder auch $0{,}0833780\,n.\,bh - 0{,}0005369\,bh < 0{,}0655428.$ Daher ist

$bh < \frac{0{,}0655428}{0{,}0833780\,n - 0{,}00005369}$; $bh < \frac{0{,}7860922}{n - 0{,}0064394}$;

$bh < \frac{0{,}7860922}{(n-1),9935605}$, wenn $n = 24$ ist, so ist $bh > \frac{0{,}7845880}{23{,}9742564}$ und

$bh < \frac{0{,}7860922}{23{,}9935605}$, oder $bh > 0{,}03272$, und $bh < 0{,}03276$, also

$bh = 0{,}0327$, das heißt $\tan \frac{45^0}{24} = \tan 1^0\,52'\,30'' = 0{,}0327.$

Hosted by Google

Für Tangenten unter $1^7/_8{}^0$ ist $\overline{\tan 1^7/_8{}^0}^2 = 0{,}00107184$,
$S = 0{,}00107184 + 16383{,}5 \times 0{,}00107184 = 17{,}5604906 + 0{,}00107184$,
oder $S = 17{,}561562$. Also ist nach hinzuaddirten Ganzen
$\frac{^1/_{24}\,n-1}{32768} . 32785{,}5615624\,bh + bh > 0{,}0327390$;
$(^1/_{24}\,n - 1) . 1{,}0000558\,bh + bh > 0{,}0327390$, oder auch
$0{,}0418689\,n . bh - 0{,}0005358\,bh > 0{,}0327390$. Mithin ist
$bh > \frac{0{,}0327390}{0{,}0416889\,n - 0{,}0005358}$; $bh > \frac{0{,}7853169}{n - 0{,}0128523}$;
$bh > \frac{0{,}7853169}{(n-1){,}9871476}$.

Ist $n = 48$, so wird also $bh > \frac{0{,}7853169}{47{,}9871476}$, $bh > 0{,}01636\ldots$

Ebenso für das Minder ist $S = 0{,}00214368 - 0{,}00000003 =$
$= 0{,}00214365$, also $\frac{^1/_{24}\,n-1}{16} . 16{,}00214365\,bh + bh < 0{,}0327390$;
$(^1/_{24}\,n - 1) . 1{,}0001339\,bh + bh < 0{,}0327390$. Also auch
$0{,}0416724\,n . bh - 0{,}0001339\,bh < 0{,}0327390$. Daher
$bh < \frac{0{,}0327390}{0{,}0416724\,n - 0{,}0001339}$; $bh < \frac{0{,}7856278}{n - 0{,}0032131}$;
$bh < \frac{0{,}7856278}{(n-1){,}9967868}$.

Ist $n = 48$, so $bh < \frac{0{,}7856278}{47{,}9967868}$; $bh < 0{,}0163683$. Da also auch
$bh > 0{,}01636..$, so muß $bh = 0{,}01636 = \tan\frac{45^0}{48} = \tan 0^0 56' 15''$ sein.

Zuletzt für Tangenten unter $\frac{15^0}{16}$ ist $\overline{\tan\frac{15^0}{16}}^2 = \overline{0{,}0163653}^2 = 0{,}0002678$,
also $S = 0{,}0002678 + 16383{,}5 \times 0{,}0002678 = 0{,}0002678 + 4{,}3878781 =$
$= 4{,}3881459$. Dazu die Ganzen addirt $32768 + 4{,}3881459 =$
$= 32772{,}3881459$. Mithin ist $\frac{^1/_{48}\,n-1}{32768} \times 32772{,}388145\,bh + bh >$
$> 0{,}0163653$, oder $(^1/_{48}\,n - 1) . 1{,}0001339\,bh + bh > 0{,}0163653$, mithin
auch $0{,}0208361\,n . bh - 0{,}0001339\,bh > 0{,}0163653$, daher
$bh > \frac{0{,}0163653}{0{,}0208361\,n - 0{,}0001339}$; $bh > \frac{0{,}7854300}{n - 0{,}0064263}$ oder
$bh > \frac{0{,}7854300}{(n-1){,}9935736}$.

Hosted by Google

Iſt $n = 60$; alſo $\frac{45^0}{60} = 45'$, ſo iſt $bh > \frac{0{,}7854300}{59{,}9935736}$; $bh > 0{,}01309..$

Für das Minder iſt $S = \frac{a \cdot e^n - a}{e - 1} = \frac{0{,}000535646 - 0{,}0000000}{2 - 1}$,

$S = 0{,}000535646$. Alſo $\frac{{}^1/_{48}\, n - 1}{16} . 16{,}0005356\, bh + bh < 0{,}0163653$;

$({}^1/_{48}\, n - 1) . 1{,}00003347\, bh + bh < 0{,}0163653$. Folglich iſt

$0{,}0208340\, n . bh - 0{,}0000334\, bh < 0{,}0163653$, mithin

$bh < \frac{0{,}0163653}{0{,}0208340\, n - 0{,}0000334}$; $bh < \frac{0{,}7855092}{n - 0{,}0011231}$;

$bh < \frac{0{,}7855092}{(n-1){,}9988768}$.

Iſt wieder $n = 60$, alſo die $\tan 45'$ zu beſtimmen, ſo iſt

$bh < \frac{0{,}7855092}{59{,}9988768}$, $bh < 0{,}0130920$. Da nun auch $bh > 0{,}01309..$ iſt, ſo muß $bh = 0{,}01309$.

Anmerkung 1. Die Größenbeſtimmungen, welche ſich bei 15^0 und bei $7\,{}^1/_2{}^0$ aus einer Anzahl von 32768 Theilen der Tangenten ergeben hatten

(1) $bh > \frac{0{,}7759897}{(n-1){,}8960341}$, $bh < \frac{0{,}7966976}{(n-1){,}9733171}$,

2) $bh > \frac{0{,}7831284}{(n-1){,}9484483}$, $bh < \frac{0{,}7882075}{(n-1){,}9870220}$), und folglich auch die daraus hervorgehenden Werthe der Tangenten bei gegebenen Winkeln bleiben im Weſentlichen dieſelben, man mag die Anzahl der Theile nach jener Anzahl von 32768 ſo groß nehmen als man will. Man erhält dadurch im Grunde keinen genaueren Werth, z. B. ſelbſt bei 34359738368 Theilen. Alsdann nemlich wäre für die Tangenten unter 15^0 folgende Beſtimmung:

$bh > \frac{0{,}7759906}{(n-1){,}8960371}$, $bh < \frac{0{,}8006537}{(n-1){,}9880814}$, welches wenn $n = 6$, dieſelbe Beſtimmung für $bh = 0{,}13$ angibt, wie dieſes ſchon bei 32768 Theilen erhalten wurde. Zweitens für Tangenten unter $7\,{}^1/_2{}^0$ wäre

$bh > \frac{0{,}7831284}{(n-1){,}9484501}$; $bh < \frac{0{,}7891553}{(n-1){,}9842281}$, welches, wenn $n = 32$ z. B. iſt, $bh > 0{,}0245$, und $bh < 0{,}0246$, alſo immer wieder wie früher $bh = 0{,}024$ macht.

Anmerkung 2. Aus der Vergleichung ſolcher Größenbeſtimmungen mit dem richtigen zu ſuchenden eigentlichen Werthe ſcheint hervorzugehen, daß man dieſen ungefähr erhält, wenn man ${}^1/_3$ der Differenz beider Beſtimmungen zu der des Mehr addirt oder ${}^2/_3$ von der des Minder abzieht. So z. B. iſt die

Hosted by Google

wirkliche eigentliche Tangente von $7\frac{1}{2}^0 = 0{,}1316525$, und die Größenbestimmungen genommen aus der ganzen Tangente von 45^0 sind, das Mehr $bh > 0{,}1176470$, das Minder $bh < 0{,}1592920$. Die Differenz beider ist $0{,}1592920 - 0{,}1176470 = 0{,}041650$; ein Drittel dieser Differenz 0,0138816 und zwei Drittel 0,0277633. Zwei Drittel abgezogen von 0,1592920 gibt 0,1315286, eben dieß, wenn ein Drittel zu 0,1176470 addirt wird. Man erhält die Tangente von $7\frac{1}{2}^0$ in den ersten 3 Decimalen richtig.

Anmerkung 3. Die gefundenen Größenbestimmungen der Tangente, welche eine allgemeine Giltigkeit haben für alle Tangenten kleinerer Winkel, als wonach sie bedingt sind, finden in einem gewissen Maße auch für die größern Winkel statt, jedoch so, daß die Mehrbestimmung immer mehr an Genauigkeit abnimmt, und die Minderbestimmung selbst keine Minderbestimmung mehr bleibt, sondern eine Mehrbestimmung wird, welche bis auf ein Gewisses gleiche Zahlen mit der frühern Mehrbestimmung behält. So lange also noch beide Bestimmungen übereinkommen, ist diese Uebereinkunft der nahe Werth der zu suchenden Tangente. So z. B. aus den Bestimmungen bei $\frac{15^0}{16} = 0^0\,56'\,15''$, nemlich $bh > \frac{0{,}7854300}{(n-1),9935736}$, $bh < \frac{0{,}7855092}{(n-1),9988768}$ erhält man zuerst für tan 1′, wo also $n = 45.60$, oder $n = 2700$ ist, $bh > 0{,}0002909$, und $bh < 0{,}0002909$. Ebenfalls für größere Winkel als $\frac{15^0}{16}$, so zum Beispiel für tan 1^0, wo also $n = 45$, ist erstens $bh > \frac{0{,}7854300}{44{,}9935236}$, $bh > 0{,}0174564$, und zweitens $bh < \frac{0{,}7855092}{44{,}9988758}$, $bh < 0{,}0174561$. Hier fällt die Minderbestimmung noch kleiner als die Mehrbestimmung aus. Nach den übereinkommenden Zahlen wäre $\tan 1^0 = 0{,}017456$, sie ist aber 0,017455. Ferner für tan 3^0 ist $bh > \frac{0{,}7854300}{14{,}9935736}$, $bh > 0{,}0523844$, und auch $bh < \frac{0{,}7855092}{14{,}9988768}$, $bh < 0{,}05230$.

Da nun diese Minderbestimmung erst in eine Mehrbestimmung verändert werden muß, so ist nach den übereingekommenen Zahlen zu urtheilen $bh = 0{,}0523$, aber die wirkliche tan 3^0 ist 0,0524. Auch erhält man aus den Größenbestimmungen, die von $3\frac{3}{4}^0$ aus genommen werden $bh > \frac{0{,}7845880}{14{,}9742564}$, und $bh < \frac{0{,}7860922}{14{,}9935606}$. Ersteres beträgt $bh > 0{,}05239$, letzteres $bh < 0{,}05242$.

Hosted by Google

Der Grund, weßhalb sich die Minderbestimmung bei den Tangenten größerer Winkel verändert, ist leicht einzusehen. Denn wenn z. B. bei gedachtem Falle in den Bestimmungen von $3^3/_4{}^0$, woselbst zuerst war

$(^1/_{12}\,n-1).1{,}0021479\,bh+bh>0{,}0655428$, und zweitens

$(^1/_{12}\,n-1).1{,}0005369\,bh+bh<0{,}0655428$ dieses n weniger als 12 beträgt, so wird in beiden Bestimmungen das erste Glied negativ. Da nun $1{,}0021479>1{,}0005369$, so kann nicht, wenn in der ersten Bestimmung Größeres von Gleichem abgezogen wird, von bh, dieses bh auch nach dem Abzug mehr ausmachen muß, als 0,0655428, zugleich in der zweiten Bestimmung, woselbst von einem Gleichen bh weniger abgezogen wird, diese zweite Bestimmung eine Minderbestimmung werden, sondern muß ebenfalls ein Mehr angeben.

Anmerkung 4. Diese Größenbestimmungen, welche bei kleinern Winkeln immer näher den wahren Werth einer zu suchenden Tangente angeben können, müssen aber auch nach ihrer äußern Gestalt an Aehnlichkeit gleicher Zahlzeichen immer näher rücken. Wenn daher bei der Bestimmung aus $\frac{15^0}{16}$ die Zähler in den ersten 3 Zahlen 785 und die Nenner in den beiden 99 übereinkommen, so können aus einer also gefundenen Tangente durch fortgesetzte Bildung von Größenbestimmungen zuletzt solche hervorgebracht werden, bei denen das Mehr sich in Nichts von dem Weniger unterscheidet. So z. B. wurde gefunden, daß $\tan 1' = 0{,}0002909$, also $\overline{\tan 1'}^2 = 0{,}00000008462$, mithin
$S = 0{,}00000008 + 16383{,}5 \times 0{,}00000008462 = 0{,}0013864$. Dazu die Ganzen addirt, und alsdann ist $\frac{^1/_{2700}\,n-1}{32768} \times 32768{,}0013864\,bh+bh> > 0{,}0002909$, und $(^1/_{2700}\,n-1)\,bh+bh>0{,}0002909$; $0{,}0003703\,n.bh> > 0{,}0002909$, mithin $bh>\frac{0{,}7855792}{n}$. Ebenso ist bei der Minderbestimmung $S=\frac{0{,}0000001}{2-1}$, mithin $\frac{^1/_{2700}\,n-1}{16}=16{,}0000001\,bh+bh<0{,}0002909$, oder $(^1/_{2700}\,n-1)\,bh+bh<0{,}0002909$; $0{,}0003703\,n\,.\,bh<0{,}0002909$; mithin $bh<\frac{0{,}0002909}{0{,}0003703n}$, oder $bh<\frac{0{,}7855792}{n}$; also müßte $bh=\frac{0{,}7855792}{n}$ sein. Aber da schon die Minderbestimmung aus $\tan\frac{15^0}{16}$ genommen war $bh<\frac{0{,}7855092}{(n-1),9988768}$, so konnte eine weitere Bestimmung aus einer kleineren Tangente diese Zahlen 0,7855092 nicht überschreiten und 0,7855792 werden. Da man dieses aber dennoch erhält, wenn man bloß die

Hosted by Google

7 Decimalzahlen 0,0003703 dividirt in 0,0002909, so sind die Zahlen des Bruches leicht weiter zu ergänzen. Also wäre $bh \gtrless \frac{0,00029090909090}{0,00037037037037n}$; $bh \gtrless \frac{0,7854545}{n}$, oder $bh = \frac{0,7854545}{n}$. Auch ist $\frac{0,7854545}{2700} =$ $= 0002909$ ebenso wie das frühere $\frac{0,7855792}{n}$, und 0,7854445 kleiner als die Minderbestimmung des vorigen von $\frac{15^0}{16}$, wogegen 0,7855792 unrichtig größer ist. Zur Berechnung der kleinern Tangenten von unter 1′ macht es daher keinen Unterschied, aber die $\tan 1^0$ wird $\frac{0,7854545}{45} = 0,0174545$ statt $\frac{0,7855792}{45} = 0,0174575$.

Anzahl der Abschnitte annähernd bestimmt aus dem gegebenen ersten untersten Abschnitt, welcher eine Tangente ist. Auffindung des zugehörenden Winkels.

1. Wenn nun umgekehrt eine Tangente gegeben ist, so läßt sich durch die vorigen Mehr- und Minderbestimmungen einer Tangente annähernd die Anzahl der Abschnitte auffinden, in welche die ganze Tangente von 45° getheilt ist, und daraus der Winkel, zu welchem die gegebene Tangente gehört. Zuerst die aus der ganzen Tangente von 45° hergeleiteten Bestimmungen $bh > \frac{1}{1,5n-0,5}$; $bh < \frac{1}{1,0555..n-0,555..}$ können leicht in folgende verwandelt werden $bh > \frac{2}{3n-1}$, $bh < \frac{18}{19n-1}$. Erstens erhält man, wenn Zähler und Nenner der Mehrbestimmung $\frac{1}{1,5n-0,5}$ mit 2 multiplicirt wird, und letzteres, wenn Zähler und Nenner der Minderbestimmung $bh < \frac{1}{1,0555...n-0,555..}$ zuerst mit 9 multiplicirt wird, wodurch $bh < \frac{9}{9,4999..n-0,4999..}$ oder $bh < \frac{9}{9,5n-0,5}$, und dann mit 2 multiplicirt gibt $bh < \frac{18}{19n-1}$. Hieraus läßt sich n finden. Denn es ist zuerst $3n.bh - bh > 2$; $3n.bh > 2 + bh$, also $n > \frac{2+bh}{3bh}$; dann $19n.bh - bh < 18$; $19n.bh <$

$< 18 + bh$, daher $n < \frac{18 + bh}{19\,bh}$. Sei hier gegeben $bh = 0{,}1316525$, so wird $n > \frac{2{,}1316525}{0{,}3949575}$, $n > 5{,}391$ und $n < \frac{18{,}1316525}{2{,}5013975}$, $n < 7{,}24$. Es ist die Differenz $7{,}24 - 5{,}39 = 1{,}85$, ein Drittel davon $0{,}016$ und $5{,}391 + + 0{,}616 = 6{,}007$, welches annähernd 6 ist. Daher der Winkel, welcher zur Tangente gehört $\frac{45^0}{6} = 7^0 30'$.

2. In VI waren aus der Tangente von $22\frac{1}{2}^0$ die Größenbestimmungen $bh > \frac{0{,}7629741}{n - 0{,}1580170}$ und $bh < \frac{0{,}8206051}{n - 0{,}0188836}$: Daraus wird

$n \cdot bh - 0{,}1580170\,bh > 0{,}7629741$; $n > \frac{0{,}7629741 + 0{,}1580170\,bh}{bh}$,

$n > \frac{0{,}7629741 + 0{,}0221032}{0{,}1316525}$, wenn nemlich $bh = 0{,}1316525$ sein soll, oder

$n > \frac{0{,}7850773}{0{,}1316525}$, $n > 5{,}96$. Ebenso $n \cdot bh - 0{,}0188860\,bh < 0{,}8206051$;

$n < \frac{0{,}8206051 + 0{,}0188836\,bh}{bh}$ oder $n < \frac{0{,}8230911}{0{,}1316525}$, $n < 6{,}25$. Die Differenz $6{,}25 - 5{,}96$ ist $0{,}29$, ein Drittel davon $0{,}09$ oder $0{,}10$, dieses addirt zu $5{,}96$ gibt $6{,}05$ oder $6{,}06$ annähernd $6 = n$.

Wenn $bh = 0{,}0327390$ gegeben ist, so erhält man für

$n > \frac{0{,}7629741}{0{,}0327390} + 0{,}1580170$; $n > 23{,}304 + 0{,}158$; $n > 23{,}46$, und

$n < \frac{0{,}8206051}{0{,}0327390} + 0{,}0188836$; $n < 25{,}065 + 0{,}188$, $n < 25{,}15$.

Wird nun 45^0 durch $23{,}46$ dividirt, so erhält man $1^0 55'$, und wird 45^0 durch $25{,}15$ getheilt, so bekommt man $1^0 47'$. Also muß der Winkel, wozu die $\tan = 0{,}0327390$ gehört, kleiner als $1^0 55'$ und größer als $1^0 47'$, mithin da die Differenz $8'$ beträgt, ein Drittel dieser Differenz $^8/_3 = 2^2/_3 = = 2' 40''$, muß die wirkliche Größe des Winkels etwa zwischen $1^0 52'$ und $1^0 53'$ enthalten sein.

3. Ebenso findet man aus VIII aus den von $\tan 7\frac{1}{2}^0$ genommenen Größenbestimmungen $bh > \frac{0{,}7831284}{n - 0{,}0515516}$; $bh > \frac{0{,}7882075}{n - 0{,}0129779}$ für

$n > \frac{0{,}7831284}{bh} + 0{,}0515516$; $n < \frac{0{,}7882075}{bh} + 0{,}0129779$.

Wenn hier bh wieder gleich $0{,}1316525$ ist, so wird erstens

Hosted by Google

$n > \frac{0{,}7831284}{0{,}1316525} + 0{,}051556$; $n > 5{,}948448 + 0{,}0515516$; $n > 5{,}99999..$

und zweitens $n < \frac{0{,}7882075}{0{,}1316525} + 0{,}0129779$; $n < 5{,}9870300 + 0{,}0129779$,

$n < 6{,}0000079$. Und wenn $bh = 0{,}0327390$, so ist erstens

$n > \frac{0{,}7831284}{0{,}0327390} + 0{,}0515516$; $n > 23{,}9203518 + 0{,}0515516$;

$n > 23{,}97..$ zweitens $n < \frac{0{,}7882075}{0{,}0327390} + 0{,}0129779$;

$n < 24{,}0754910 + 0{,}0129779$; $n < 24{,}0884689$. Wird 45^0 durch 23,9719034 dividirt, so erhält man $1{,}8771 = 1^0 52' 37''$, und wird 45^0 durch 24,0884689 getheilt, so erhält man $1^0 52' 6'' = 1\frac{2091^0}{2408}$.

Also muß der Winkel, wozu die Tangente 0,0327390 gehört, auch ungefähr $1^0 52'$ sein. Es ist aber auch 0,0327366 gleich $\tan 1^7/_8{}^0 = \tan 1^0 52' 30''$.

4. Aus den in IX angegebenen Größenbestimmungen

$bh > \frac{0{,}7845880}{n - 0{,}0257435}$, $bh < \frac{0{,}7860922}{n - 0{,}0064394}$; $bh > \frac{0{,}7853169}{n - 0{,}0128523}$,

$bh < \frac{0{,}7856278}{n - 0{,}0032131}$, $bh > \frac{0{,}7854300}{n - 0{,}0064263}$; $bh < \frac{0{,}7855092}{n - 0{,}0011231}$

wird 1) $n > \frac{0{,}7845880}{bh} + 0{,}0257435$, $n < \frac{0{,}7860922}{bh} + 0{,}0064394$;

2) $n > \frac{0{,}7853169}{bh} + 0{,}0128523$, $n < \frac{0{,}7856278}{bh} + 0{,}0032131$:

3) $n > \frac{0{,}7854300}{bh} + 0064263$, $n < \frac{0{,}7855092}{bh} + 0{,}0011231$;

je nachdem die gegebene Tangente bh unter $3^3/_4{}^0$, $1^7/_8{}^0$ oder $\frac{15^0}{16}$ zu suchen ist.

5. Da nach XI, Anmerkung 4) $bh = \frac{0{,}7854545}{n}$, so ist auch $n = \frac{0{,}7854545}{bh}$. Nun ist die Gradenanzahl oder der Winkel, wozu eine Tangente gehört $\frac{45^0}{n}$, also auch $\frac{45^0}{\frac{0{,}7854545}{bh}} = \left(\frac{45 . bh}{0{,}7854545}\right)^0$.

Ein zu einer Tangente zu suchender Winkel muß also auch $\left(\frac{45 . bh}{0{,}7854545}\right)^0$ enthalten, das ist $(57{,}2916699\, bh)^0$.

Hosted by Google

Ist die Tangente gleich 0,0163653 gegeben, so muß der dazu gehörende Winkel 57,2916699 × 0,0163653 Grade enthalten. Nun ist (57,2916699 × × 0,0163653)^0 = (0,9373953)^0 d. i. 0^{0}56′15″. Ebenso wenn die Tangente gleich 0,0327390 gegeben, so ist der Winkel (57,2916699 . 0,0327390)^0 = = 1$^7/_8{}^0$ übereinstimmend. Je größer aber die Tangente bh genommen wird, um so weniger erhält man die Grade des Winkels richtig. Es sei z. B. die Tangente gleich 0,1316525 gegeben, so wäre der Winkel (57,2916699.0,1316525)^0 = = (7,542^0) = 7^{0}32′31″, während der richtige Winkel nur 7^{0}30′ ist.

Wenn die Tangente gleich 0,2679491 gegeben ist, so müßte der Winkel (57,2916699 × 0,2679491)^0 sein, oder gleich (15,3512510)^0 d. i. 15^{0}20′3″, doch der richtige Winkel ist nur 15^0.

6. Auch ist ein Winkel immer kleiner als 135mal der gehörenden Tangente dividirt durch 2 vermehrt um diese Tangente, und derselbe Winkel größer als 855mal die Tangente dividirt durch die Summe von 18 und der Tangente:

$$\text{Winkel} < \frac{135\,bh}{2+bh};\quad \text{Winkel} > \frac{855\,bh}{18+bh}.$$

Nach 1. war $n > \frac{2+bh}{3\,bh}$, daher auch $\frac{45^0}{n} < \frac{45^0}{\frac{2+bh}{3\,bh}}$, oder

$\text{Winkel} < \frac{45^0 . 3\,bh}{2+bh}$, das ist $\text{Winkel} < \frac{(135\,bh)^0}{2+bh}$. Ebenso war auch

$n < \frac{18+bh}{19\,bh}$, folglich $\frac{45^0}{\frac{18+bh}{19\,bh}} < \frac{45^0}{n}$, oder $\frac{45^0}{n} > \frac{45^0}{\frac{18+bh}{19\,bh}}$, das ist

$\text{Winkel} > \frac{(855\,bh)^0}{18+bh}$.

7. und X. Es ist daher auch wieder umgekehrt:

$$bh > \frac{2 \times \text{Winkel}}{135 - \text{Winkel}} \text{ und } bh < \frac{18 \times \text{Winkel}}{855 - \text{Winkel}}.$$

Denn da $\text{Winkel} < \frac{(135\,bh)^0}{2+bh}$, so ist auch

$2 \times \text{Winkel} + bh \times \text{Winkel} < (135 . bh)^0$, oder

$2 \times \text{Winkel} < (135 . bh)^0 - bh \times \text{Winkel}$; $bh > \frac{2 \times \text{Winkel}}{135 - \text{Winkel}}$.

Zweitens ist $18 \times \text{Winkel} + bh \times \text{Winkel} > (855\,bh)^0$; oder

$18 \times \text{Winkel} > bh\,(855 - \text{Winkel})$, daher $bh < \frac{18 \times \text{Winkel}}{855 - \text{Winkel}}$.

Die Winkel sind nach dem Gradenmaße anzugeben. Wäre also z. B. der

Hosted by Google

Winkel von 5′ gegeben, so ist zu setzen $\frac{5^0}{60}$, und wäre $2^0\,6'\,10''$ gegeben, so ist zu setzen $2^0\,6\frac{10'}{60} = 2^0\,\frac{370'}{60} = 2^0\,\frac{370}{3600} = 2^0\,\frac{37}{360} = \frac{720+37}{360} = \frac{757^0}{360}$. Im ersten Falle ist also $b\,h > \frac{2.\,{}^5/_{60}}{135 - {}^5/_{60}}$, $b\,h > \frac{2\;5}{135.60-5}$; $b\,h > \frac{10}{8095}$, $b\,h > 0{,}0012353$; ebenso ist $b\,h < \frac{18.\,{}^5/_{60}}{855 - {}^5/_{60}}$ oder $b\,h < \frac{18.5}{855.60-5}$; $b\,h < \frac{90}{51295}$; ; $b\,h < 0{,}0017545$.

Die Differenz zwischen beiden ist $0{,}0017545 - 0{,}0012353 = 0{,}0005192$; ein Drittel dieser Differenz 0,0001730. Dieses addirt zu dem Kleineren $0{,}0012353 + 0{,}0001730 = 0{,}0014083$. Folglich muß tan 5′ etwa 0,0014 sein. Im zweiten Falle $b\,h > \frac{2 \times \frac{757}{360}}{135 - \frac{757}{360}}$, $b\,h > \frac{2.757}{135.360-757}$ $b\,h > \frac{1514}{48300-757}$; $b\,h > \frac{1514}{47543}$, oder $b\,h > 0{,}0318448$; ebenso $b\,h < \frac{18 \times \frac{757}{360}}{855 - \frac{757}{360}}$; $b\,h < \frac{18 \times 757}{855.360-757}$; $b\,h < \frac{13626}{307800-757}$; $b\,h < \frac{13626}{307043}$; $b\,h < 0{,}0443781$. Ein Drittel der Differenz $^1/_3\,(0{,}0443781 - 0{,}0318448) = {}^1/_3\,.\,0{,}0125333 = 0{,}0044777$, addirt zu der kleinern Bestimmung, also $0{,}0318448 + 0{,}0044777 = 0{,}0360225$. Also kann die Tangente von $2^0\,6'\,10''$ etwa 0,036 betragen.

Annäherndes Verhältniß der Peripherie eines Kreises zum Durchmesser, welches sich durch die Größenbestimmungen ergibt.

Da durch die Größenbestimmungen Tangente und Winkel wechselweise zu einiger Genüge aus einander bedingt werden können, so ist es einleuchtend, wie man solches gebrauchen kann, um das Verhältniß der Peripherie eines Kreises zu dem Durchmesser daraus zu berechnen. So zum Beispiel, wenn eine beliebige gegebene Linie für 1 angenommen wird, unter einem rechten Winkel eine Kathete daran gelegt, die ein bestimmtes Wievielfaches der ersten Kathete ausmacht, also etwa 11000 (s. IV. Geometrisches, 12 Lehrsatz), so muß, wenn man

Hosted by Google

die Hypotenuse beschreibt, die Tangente des spitzen Winkels, dieser heiße α, gleich sein $^1/_{11000}$, oder $\tan\alpha = 0{,}0000909$, weil $\sin a : \cos\alpha = K : n.K$. Nun muß also annäherungsweise nach (5) der Winkel $\alpha = 57{,}2916699 \tan\alpha$ sein, oder $\alpha = 57{,}2916699 \times 0{,}0000909 = 0{,}0052078$. Jedes rechtwinkelige Dreieck aber kann angesehen werden als ein halbes Polygondreieck eines zu beschreibenden Polygons, wenn ein spitzer Winkel zugleich einen halben Centriwinkel beträgt. Da aber dieses ungewiß ist, ob 0,005208 ein halber Centriwinkel, so kann dennoch, besonders bei sehr kleinen Winkeln, solch ein Winkel für ein halber Centriwinkel gehalten werden. Man suche also bei gegebenem halben Centriwinkel die Anzahl der Seiten des Polygons. Da es so viele Seiten gibt als Centriwinkel, so ist 360^0 gleich dem Centriwinkel multiplicirt mit der Seitenanzahl, $360^0 = SA \times CW$, also $SA = \frac{360^0}{CW}$, also auch

$$SA = \frac{360}{2.\,0{,}0052078} = \frac{360}{0{,}0104156} = 34563{,}53.$$

Mithin gibt es ungefähr 34563 bis 34564 Seiten, wenn $\tan\alpha = {}^1/_{11000}$, oder wenn der kleine Halbmesser, die Kathete gleich 11000 ist. Es ist also auch (s. IV. Geometrisches 18. Lehrs.) $SA : K \gtrless \pi : 1$; $\frac{SA}{K} \gtrless \pi$, folglich

$$\frac{34563{,}53}{11000} \gtrless \pi, \text{ oder } 3{,}1421 \gtrless \pi.$$

Nemlich aus den Verhältnissen $SA : h < \pi : 1$ und $SA : k > \pi : 1$, also $SA : r = \pi : 1$, das heißt: die Seitenanzahl eines regulären Polygons, dessen halbe Seite für die Einheit gilt, verhält sich zur Hypotenuse, dem größern Halbmesser, weniger als die Peripherie des Kreises zum Durchmesser; und dieselbe Seitenanzahl zur Kathete, dem kleinern Halbmesser mehr; also die Seitenanzahl eines Polygons verhält sich zu dem Halbmesser desselben (d. i. dem übereinstimmenden Werth des großen und kleinen Halbmessers) wie $\pi : 1$; aus diesen Proportionen gehet hervor, daß $\frac{SA}{h} < \pi$, $\frac{SA}{k} > \pi$, $\frac{SA}{r} = \pi$. So lange also die Kathete mit der Hypotenuse übereinstimmt, kann man für den Radius die Kathete setzen, und alsdann ist $\frac{SA}{k} = \frac{360}{CW.k} = \frac{360.\text{tang}}{CW} \gtrless \pi$. Da nun der halbe Centriwinkel $\alpha = 57{,}2916699 \tan\alpha$ ungefähr beträgt, so ist also auch

$$\pi \gtrless \frac{360.\tan\alpha}{2.\,57{,}2916699 \tan\alpha} \gtrless \frac{360}{114{,}5833398} \gtrless 3{,}1426,$$

das heißt also: Die Peripherie des Kreises ist immer $\gtrless$ 360mal einer gegebenen Tangente dividirt durch das Doppelte des Winkels, welcher zu dieser Tangente gehört. Da aber

Hosted by Google

auch zweitens $\frac{SA}{h} < \pi$, und wenn in einem rechtwinkeligen Dreieck die Hypotenuse ein bestimmtes Wievielfaches der ersten Kathete, der Einheit ist (s. IV. Geometrisches 12 Lehrs.), dann der Sinus des dieser Kathete gegenüberliegenden spitzen Winkels $\sin \alpha' = {}^1/_n$ ausmacht, so ist auch $\frac{SA}{h} = \frac{360^0}{CW.h} =$

$= \frac{360^0.\sin \alpha'}{CW} \leqq \pi$. Es ist also auch die Peripherie des Kreises immer gleich ($\geqq$) 360mal einem gegebenen Sinus dividirt durch das Doppelte des Winkels, welcher zu diesem Sinus gehört. Daher erstens auch:

$\pi = \leqq \frac{180^0.\tan \alpha}{\alpha}$, und zweitens $\pi \geqq \frac{180^0.\sin \alpha'}{\alpha'}$.

Da aber auch der Winkel α' jede beliebige Größe erhalten kann, so kann α' auch gleich α angenommen werden. Dadurch wird die Formel

$\pi \geqq \frac{180^0.\sin \alpha'}{\alpha'}$ zu dieser $\pi \geqq \frac{180^0.\sin \alpha}{\alpha}$.

Der Bruch $\frac{180^0}{\alpha}$ multiplicirt mit der Tangente des Winkels α gibt etwas Größeres, und derselbe Bruch $\frac{180^0}{\alpha}$ multiplicirt mit dem Sinus des Winkels etwas Kleineres, als die Peripherie des Kreises ausmachen muß.

Zusatz. Ist die Peripherie des Kreises gegeben, und entweder a) ein Winkel, oder b) die Tangente oder d.r Sinus eines Winkels, so kann daraus das Uebrige bestimmt werden, indem 1) $\sin \alpha \leqq \frac{\pi.\alpha}{180^0}$; $\tan \alpha \geqq \frac{\pi.\alpha}{180^0}$;

2) $\alpha \leqq \frac{180^0.\tan \alpha}{\pi}$; $\alpha \geqq \frac{180^0.\sin \alpha}{\pi}$.

Hosted by Google

VI.

Rechnung des Unendlichen

in seiner Verbindung mit endlichen Größen. und dem Nichtseienden.

Nach den Aufzeichnungen in den Jahren 1845 bis 1851.

Hosted by Google

Hosted by Google

1. Einleitung.

Wenn die Wörter mit der Vorsilbe un beginnen, so wird durch dieses un die Verneinung oder das Gegentheil dessen ausgedrückt, was das einfache Wort ohne diese Silbe bezeichnet. So ist unsanft soviel als nicht sanft, unbillig ist nicht billig, unschwer ist nicht schwer oder leicht. Ausgenommen sind nur die Wörter unten, unter und unser, und die davon abgeleiteten oder zusammengesetzten Wörter; das Wort und beginnt zwar mit un, dieses macht aber nicht eine ganze Silbe aus. Ferner machen eine Ausnahme nur diejenigen Wörter, welche aus fremden Sprachen, der lateinischen und den romanischen herstammen, wo das un in der Zusammensetzung zum Theil ein eigenes Wort, theils zugehörende Vorsilbe des Stammwortes ist, wie unison, eintönig, uniform, eingestaltig, unda Welle. Wenn aber das un sich nicht in dem fremden Worte als solches findet, so ist es deutschen Stammes, und bezeichnet ebenfalls die Verneinung oder den Gegensatz, wie uninteressant, d. i. nicht interessant; unacceptabel, nicht annehmbar. — Diese Verneinung oder dieser Gegensatz zeigt sich nun meistens so, daß er in dem gänzlichen Aufhören oder Fehlen und Verschwinden dessen besteht, was das einfache, unzusammengesetzte Wort ausdrückt. So ist Unrecht, was kein Recht ist, Unfriede, wo der Friede fehlt. Liegt aber in dem einfachen Worte der Begriff einer Beschränkung, Begrenzung, so wird durch die Zusammensetzung mit un diese Schranke aufgehoben, und da dieses geschehen kann nach zwei Richtungen hin, entweder daß die Grenzen weiter hinausgerückt oder auch enger zum Nichtseinschließen gezogen werden, so kann das zusammengesetzte Wort sowohl im Sinne des Größeren als des Kleineren genommen werden. Meistens geschieht dieses jedoch im ersteren Falle. So ist unbeschränkt, wo man im Weiten keine Grenze findet, Unmaß was das Maß überschreitet; unmäßig, Unmäßigkeit ist nicht, daß man wenig, so zu sagen nichts, sondern zu viel genießt; unermeßlich, was der Größe nach nicht zu messen ist, und hierhin gehört auch das Wort unendlich, was kein Ende hat in dem Sinne, daß das Ende nicht gefunden wird, wenn man im Vergrößern fortschreitet. Es kann auch das Wort groß zur Bezeichnung beigegeben werden,

Hosted by Google

unermeßlich groß, unendlich groß, und will man das stetige Verengern der Grenzen bezeichnen, so setzt man das Wort klein dabei, unermeßlich klein, unendlich klein. Der Sprachgebrauch hat nun gewollt, daß man vorzüglich das Aufhören der Grenzen im Großen sich dachte, daher auch wenn dieses ausgedrückt werden soll, das beigesetzte groß meistens fehlt, und man sagt unermeßlich, d. i. unermeßlich groß, unendlich, d. i. unendlich groß. Dagegen beim Verengen der Grenzen das Wort klein nicht fehlen darf, unermeßlich klein, unendlich klein. Also hat man unendlich und unendlich klein als die gewöhnlichsten Ausdrücke nach beiden Richtungen hin. Es wird aber nicht immer so entschieden wie hier im Sinne des Vergrößern die Schranke aufgehoben, sondern es ist auch der Fall, daß dieses gleichmäßig nach beiden Richtungen hin stattfindet. So ist unkörperlich sowohl dasjenige, was über das Körperliche, das in diesen Grenzen Eingeschlossene hinausliegt, das Geistige, als auch das Nichts, was noch bleibt, wenn das Körperliche, Materielle weggedacht wird, das Schattenbild, die bloße Erscheinung.

Weil beim Vergrößern durch Aufheben der Grenzen nicht angegeben wird, wo sie aufhören, wo diese hinzusetzen sind als Endziel, so bezeichnet man im gewöhnlichen Leben durch das den Wörtern vorgesetzte un oft nur überhaupt eine bloße Vergrößerung dessen, was das einfache Stammwort bedeutet. So wenn man sagt Unmasse, d. h. die in gewisse Grenzen eingeschlossene Masse wird überschritten, also große Masse; Unmaß, großes Maß; und wenn das einfache Wort schon etwas Großes bezeichnet, wird das mit un zusammengesetzte gleichbedeutend mit jenem gebraucht, also Unmasse gleich Masse, Unkosten gleich Kosten, Ungewitter gleich Gewitter. Und so hat der Gebrauch im gewöhnlichen Leben auch mit dem Wort unendlich verfahren, wie es überhaupt da nicht darauf ankommt, daß man aufs genaueste seine Angaben macht, sondern sich statt dessen der Vergrößerung im uneigentlichen Sinne bedient. Man sagt daher sehr häufig unendlich viel für sehr viel, es gibt unendlich viel zu thun, für sehr viel zu thun; mit dem Wort unendlich will man nicht andeuten, daß man damit nicht zu Ende kommt, sondern nur, daß fürab sich noch kein Ende sehen läßt.

Wie wir im Deutschen mit dem Wörtchen un, so verfahren fremde Sprachen mit ähnlichen Vorsilben. Im Griechischen wird unser un durch das vorgesetzte α (vor Vokalen gewöhnlich αν) ausgedrückt, welches man daher das α privativum nennt, so ἄλογος unvernünftig, ἄβατος unwegsam, ἀναιδής unverschämt; und ebenso beim Aufhören der Schranke nach dem Vergrößern; so heißt ξύλον Holz, ein Vorrath von Holz, ἄξυλον eine Unmasse Holz, ein großer Vorrath desselben. Deßhalb haben die Grammatiker dieses α im letzten Worte unterschieden von dem α in den früheren Wörtern, und jenes α intensivum genannt zum Unterschied von dem α privativum. Aber es ist Unrecht,

Hosted by Google

daß man nun glauben wollte, das α intensivum sei etwas anderes als das privativum, sondern es ist das privativum selbst, und ebenso nur gebraucht, wie wir Unmasse statt Masse sagen in gleicher Bedeutung, wo ersteres nach Aufhebung der Schranke in vergrößerndem Sinne gesagt wird.

Im Lateinischen wird unser un durch das vorgesetzte in wiedergegeben. Da aber auch die Präpositionen in, inter zugleich in der Zusammensetzung vorkommen, so geschieht es theils daß lateinische Wörter mit anfangendem in die Bedeutung dieser Präposition mit haben können, theils drückt dieses in das Gegentheil des einfachen Wortes aus, incedo gehe einher, incommodus unbequem. Daher kann es kommen, daß dasselbe Wort einmal in der einen Bedeutung der Präposition, ein andermal in der Bedeutung der Negation vorkommt, so inaudire einhören oder anhören, inauditus ungehört. Vorzüglich werden die Participia gebraucht im verneinenden Sinne, die übrigen Modi und Tempora des Verbum in der Präpositionsbedeutung.

Wenn wir nun in der Wissenschaft, seis in der Mathematik, seis in der Philosophie uns mit dem Unendlichen beschäftigen, so gebührt es sich doch wohl, daß wir von dem ungenauen und unzutreffenden Gebrauch des Wortes im gemeinen Leben absehen, und es in seiner eigentlichsten Bedeutung nehmen. So faßten es die alten Mathematiker auch auf, wenn sie sagten: die Parallellinien treffen nie zusammen, und wenn man sie auch unendlich verlängern wollte; ebenso reden sie von der Asymptote, die nie die Hyperbel erreicht; bei der Theilung des Körperlichen sowohl wie der Zahlen, die man ohne Ende fortgesetzt sich denken kann. Von den Mathematikern nahmen die Philosophen das Unendliche auf, und suchten den Begriff desselben zu bestimmen, wobei sie dasselbe immer so auffaßten, als etwas was ohne Ende ist.

Als aber nun die Differential- und Integralrechnung erfunden wurde, geriethen die Mathematiker mit der Bestimmung des Unendlichen ins Schwanken. Hatte man schon früher wahrgenommen, daß wenn man an eine krumme Linie, seis Kreis oder Parabel nach einander zusammenhängend Tangenten und Sehnen zieht, diese je kleiner sie werden, immer auch mehr gleich groß zu einander sind, so daß bei sehr großer Kleinheit Tangente und Sehne desselben Bogens der krummen Linie bis auf ein verschwindendes als gleich zu einander, und daher um so mehr als gleich mit dem Stück der dazwischen liegenden krummen Linie, gehalten werden können, wodurch man sowohl einen Theil der Länge der krummen Linie, als ein von derselben begrenztes Stück der Fläche berechnete, so suchte man jetzt die krumme Linie durch beigefügte gewöhnlich rechtwinkelige Coordinaten, 2 bei der Fläche, 3 bei dem Raume zu bestimmen, nannte die eine erste die Abscissenlinie oder Achse, die andern die Ordinaten. Ebenso theilte man

Hosted by Google

dann diese Coordinaten von einem gewissen Punkte aus, von wo sie ausgehend bis zur krummen Linie oder umgekehrt von einem Punkte der krummen Linie bis zu einem Punkte der schneidenden Achse in sehr viele gleiche Theile, welche auch noch so klein zu nehmen seien, und nannte dann einen solchen kleinen Theil das Differential der ganzen Linie; auch wurden die durch die Coordinaten erhaltenen kleinsten Stücke der krummen Linie die Differentiale derselben genannt. Aehnlich verfuhr man bei Flächen und Körpern. Nun behaupten die Mathematiker, daß diese Differentiale zwar immer noch so kleine Theile der Linie, aber dennoch größer als Nichts, als Null seien, und nennen einen solchen kleinen Theil den unendlich kleinen, und die ganze Linie enthalte solcher Theile unendlich viele. Da sich nun die Differentialrechnung mit der Untersuchung und Bestimmung dieser kleinsten sogenannten unendlichen Theile beschäftigt, die Integralrechnung es aber damit zu thun hat, wie aus den gegebenen Differentialen die ganze Linie, oder Fläche, Körper wird, so nannten sie dieses beide zusammen mit dem Namen der Infinitesimalrechnung.

Daß nun aber dieses Unendliche der Mathematiker nicht das eigentlich Unendliche ist, sondern nach sehr ungenauem Ausdrucke so genannt wird, ist leicht einzusehen. Denn wenn das Differential nicht gleich Null ist, sondern immer noch einen wenn auch noch so kleinen Theil der Linie oder der Fläche, des Körpers enthält, so können unmöglich die gesammten Theile des Integrals unendliche sein, sondern immer nur endliche, wenn deren Zahl auch noch so groß ist. Das sagten ihnen auch die Philosophen, mit welchen sie durch solche ihre Erklärung in Zwiespalt geriethen; das was die Mathematiker für unendlich ausgeben, ließen jene als solches nicht gelten, das sei, sagten sie ein indefinitum, aber nicht ein infinitum, ein ins Unbestimmbare Vergrößertes, aber nicht ein Unendliches, und so blieben sie bei dem richtigen Begriff, wie ihn die alten Mathematiker auffaßten. Trotzdem haben die neueren Mathematiker an dieser ihrer Bezeichnung des Unendlichen festgehalten, und geben nun auch Definitionen und Erklärungen des Unendlichen, welche mit dem eigentlich Unendlichen im Widerspruch stehen. So sagt Lipschitz in seinem schätzbaren Werke, Analysis, zweiter Band §. 8. S. 41: „Wenn ein Werth numerisch in solchem Maße wächst, daß er jede gegebene Größe übertrifft, so sagt man, daß der Werth unendlich groß werde“, und vom unendlich kleinen, Analysis II. §. 41, S. 222: „Eine Größe, die beliebig oder ohne Ende verkleinert werden kann, wird eine unendlich kleine Größe genannt.“ Hier ist wohl nach verkleinert ein ausgelassenes Wort, wie „gesetzt“ oder „genommen“ zu denken. Denn nicht wohl wenn die Größe verkleinert werden kann, darf man sie unendlich klein nennen, sondern wohl doch nur, wenn sie wirklich also klein ist, also klein genommen werden kann. Dann beliebig oder ohne Ende verkleinert ist nicht eins sondern zweierlei, das erstere

Hosted by Google

das uneigentliche, das andere das eigentlich Unendliche. Und nun das unendlich Große. Ist etwas schon deßhalb unendlich, weil es eine gegebene Größe übertrifft? Und doch sagen ähnlicherweise alle Mathematiker, besonders bei dem unendlich Kleinen, dem Differential, dieses sei kleiner als jede angebbare Größe. S. Navier, Differential- und Integralrechnung, übersetzt von Wittstein §. 11. S. 12, wo der Uebersetzer zur Erläuterung auch noch aus Carnot, Geom. der Stellung I. §. 19 anführt: „Eine unendlich kleine Größe ist nicht eine Größe gleich Null, sondern eine Größe, welche Null zur Grenze hat," und aus Ohm, Geist der mathemathischen Analysis II. S. 67: „Die unendlich große wie die unendlich kleine Zahl ist nie im Sein vorhanden, sondern immer nur im Werden begriffen. Die Existenz derselben kann aber nicht bezweifelt werden, u. s. w." Hier soll etwas existiren, was nicht ist, gewöhnlich wird Existenz mit dem Sein für gleich gehalten, hier wohl mit dem Werden. Eine Größe aber, welche Null zur Grenze hat, gibt es eine solche? denn angenommen, es sei eine, die nicht selbst Null ist, so kann man diese Größe, so klein sie auch sein mag, wieder theilen und zwar in unendliche Theile ebenso gut wie die ganze Größe, von der sie ein solch uneigentlich genannter unendlicher Theil sein soll, und im Vergleich zu diesen weiteren Theilen steht jene Größe weit ab von der Grenze zu Null. Was ist aber nun ein Differential kleiner als jede angebbare Größe? Das kann doch nur eine Größe sein, die nicht angebbar ist, wenn sie aber nicht angebbar, wie kann sie dann noch eine Größe sein, denn wäre sie eine Größe, so ist sie schon damit angegeben.

In solchen unbestimmten nichtssagenden Ausdrücken drehen sich die Mathematiker herum bei ihrer Angabe und Bestimmung des unendlich Großen und des unendlich Kleinen, und bei ihrer verschiedenen Bestimmung von derjenigen der Philosophen, spricht man von jener Zeit an von einem philosophischen und von einem mathematischen Unendlichen, als wenn es ein doppeltes Unendliches gäbe, ein anderes bei den Philosophen und ein anderes bei den Mathematikern; ja da bei diesen das unendlich Kleine sein soll, was nicht selbst Null, sondern Null zur Grenze hat, deßhalb aber der Null gleich geachtet werden kann, redet man sogar von der mathematischen Null, welche das gleich der Null geachtete unendlich Kleine sein soll? Ist es soweit mit den Mathematikern gekommen? Früher galt das, was von den Mathematikern genannt wurde, und zwar anders als man im gemeinen Leben dafür hielt, für das eigentlich Wissenschaftliche und Richtige im Gegensatz zu dem Unbestimmten und Unklaren des gemeinen Lebens, wie wenn man von der mathematischen Linie, der mathematischen Fläche, dem mathematischen Punkte sprach im Gegensatz zu der in sinnlicher Anschauung gegebenen Linie, Fläche und Punkt, und das war das Richtige und Gesetzliche, nach welchem die Philosophen ihre Betrachtungen verfolgten. Jetzt soll das mathe-

Hosted by Google

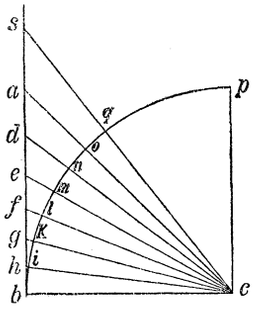
matisch unendlich Große wie Kleine das nach der grobsinnlichsten Anschauung Vorgestellte sein, für das Richtige mag man sich anderwärts im Leben vorsehen. Muß das nicht ein demüthigendes Gefühl für die Mathematiker sein bei all ihren großen Leistungen, welche sie gewähren durch den ungeheuren Fortschritt, welchen in der neueren Zeit die Wissenschaft gemacht hat?

Was aber ist denn nun das wahre mathematisch unendlich Große und unendlich Kleine, gibt es ein solches, und wenn also, wie kann es aufgefunden und nachgewiesen werden?

Ja es gibt ein solches wahres mathematisch unendlich Großes und unendlich Kleines, und daß es ein solches gibt, werde ich nun zeigen, indem ich hiermit die von mir gemachte Entdeckung mittheile.

2. Wie das wahre mathematisch unendlich Große sowohl als unendlich Kleine gefunden werden kann.

Fig. 1.



Man beschreibe (s. Fig. 1) aus einem Punkte c als Mittelpunkt mit dem Halbmesser c b einen Quadranten, den Viertentheil des Kreises b p, theile denselben in dem Punkte o in zwei gleiche Theile b o und o p, so daß also jeder Theil 45^0 enthält, dann theile man den Theil b o in beliebig viele gleiche Theile, an der Figur sind solcher Theile 6 genommen, b h, i k, k l, l m, m n und n o, nehme dazu noch einen weitern gleichen Theil o q. Dann lege man von b aus an den Quadranten eine Tangente, oder eine auf b c im Punkte b senkrecht stehende Linie, ziehe dann aus c nach den Theilungspunkten des Quadranten nach i, k, l, m, n, o, q gerade Linien, und verlängere dieselben, bis sie die Tangente in den Punkten h, g, f, e, d, a, s schneiden. Dadurch wird die Tangente in die unter einander ungleichen Abschnitte b h, h g, g f, f e, e d, d a, a s getheilt. Nun hat man aus der Geometrie:

$$\left.\begin{array}{l} bh:hg = bc:gc, \\ hg:gf = hc:fc, \\ gf:fe = gc:ec, \\ fe:ed = fc:dc, \\ ed:da = ec:ac, \end{array}\right\} \text{Daher auch} \left\{\begin{array}{l} bh:gf = bc.hc:gc.fc, \\ bh:fe = bc.hc:fc.ec, \\ bh:ed = bc.hc:ec.dc, \\ bh:da = bc.hc:dc.ac, \\ bh:x = bc.hc:\sec m^0.\sec n^0, \\ bh:y = bc.hc:\sec m^0.\sec n'^0; \end{array}\right.$$

wo x und y zwei aneinander liegende Abschnitte der Tangente b a, x der un-

Hosted by Google

tere, y der obere bedeutet; $\sec m^0$ und $\sec n^0$ sind die Secanten, welche den Abschnitt x und $\sec m^0$ und $\sec n'^0$ sind die Secanten, welche y begrenzen.

Nun ist auch:

$\overline{bh}^2 : x^2 = \overline{bc}^2 . \overline{hc}^2 : \overline{\sec m^0}^2 . \overline{\sec n^0}^2$, und $\overline{bh}^2 : y = \overline{bc}^2 . \overline{hc}^2 : \overline{\sec m^0}^2 . \overline{\sec n'^0}^2$;

$\overline{bh}^2 : x^2 = 1 + \overline{bh}^2 : \overline{\sec m^0}^2 (1 + (\tan m^0 - x)^2)$, und $\overline{bh}^2 : y^2 = 1 + \overline{bh}^2 :$

$: \overline{\sec m^0}^2 (1 + (\tan m^0 + y)^2)$, oder

$\overline{bh}^2 : 1 = x^2 : (\overline{\sec m^0})^2 - 2 \overline{\sec m^0}^2 . \tan m^0 . x + x^2 . \overline{\tan m^0}^2$, und

$\overline{bh}^2 : 1 = y^2 : (\overline{\sec m^0})^2 + 2 \overline{\sec m^0}^2 . \tan m^0 . y + y^2 . \overline{\tan m^0}^2$, daher

$bh = \dfrac{x}{\overline{\sec m^0}^2 - \tan m^0 . x} = \dfrac{y}{\overline{\sec m^0}^2 + \tan m^0 . y}$. Es ist also auch

$x : y = \overline{\sec m^0}^2 - \tan m^0 . x : \overline{\sec m^0}^2 + \tan m^0 . y$, oder

$x : y = \dfrac{1}{\overline{\cos m^0}^2} - \dfrac{\sin m^0 . x}{\cos m^0} : \dfrac{1}{\overline{\cos m^0}^2} + \dfrac{\sin m^0 . y}{\cos m^0}$, oder

$x : y = 1 - \sin m^0 . \cos m^0 . x : 1 + \sin m^0 . \cos m^0 . y = 1 - {}^1/_2 \sin 2 m^0 x :$

$: 1 + {}^1/_2 \sin 2 m^0 y$; also

$\dfrac{x}{1 - {}^1/_2 \sin 2 m^0 . x} = \dfrac{y}{1 + {}^1/_2 \sin 2 m^0 . y}$, oder ${}^1/_y + {}^1/_2 \sin 2 m^0 = {}^1/_x - {}^1/_2 \sin 2 m^0$,

folglich $\sin 2 m^0 = {}^1/_x - {}^1/_y = \dfrac{y - x}{x . y}$ und $y - x = x . y . \sin 2 m^0$.

Ist $m^0 = 45^0$, so ist $\sin 2 m^0 = 1$, und dann $y - x = x . y$, in allen andern Fällen ist $y - x < x . y$.

Lehrsatz I. Es ist $bh = \dfrac{y - x}{(y + x) \tan m^0}$, und $\tan m^0 = \dfrac{y - x}{(y + x) bh}$.

Beweis. Da $bh = \dfrac{x}{\overline{\sec m^0}^2 - \tan m^0 . x} = \dfrac{y}{\overline{\sec m^0}^2 + \tan m^0 : y}$, so ist

$bh . \overline{\sec m^0}^2 = x (1 + bh \tan m^0)$, also $x = \dfrac{bh . \overline{\sec m^0}^2}{1 + bh . \tan m^0}$ und

$bh . \overline{\sec m^0}^2 = y (1 - bh . \tan m^0)$, also $y = \dfrac{bh . \overline{\sec m^0}^2}{1 - bh . \tan m^0}$, daher

$x : y = 1 - bh . \tan m^0 : 1 + bh . \tan m^0$, und $y + x : y - x = 2 : 2 bh . \tan m^0$,

also $bh = \dfrac{y - x}{(y + x) \tan m^0}$ und $\tan m^0 = \dfrac{y - x}{(y + x) bh}$.

Hosted by Google

Lehrsatz II. Es ist auch $\tan m^0 = {}^1/_2\, x + \sqrt{{}^1/_4\, x^2 + \frac{x - b\,h}{b\,h}} =$

$= - {}^1/_2\, y \pm \sqrt{{}^1/_4\, y^2 + \frac{y - b\,h}{b\,h}}$.

Beweis. Nach dem vorigen Lehrsatze ist $b\,h = \frac{y - x}{(x + y)\tan m^0}$, und es war auch $b\,h = \frac{x}{\sec^2 m^0 - \tan m^0 . x} = \frac{y}{\sec^2 m^0 + \tan m^0 . y}$, daher

$\frac{y - x}{(x + y)\tan m^0} = \frac{x}{1 + \tan m^0 (\tan m^0 - x)} = \frac{y}{1 + \tan m^0 (\tan m^0 + y)}$,

also zuerst $b\,h + b\,h . \tan m^0 (\tan m^0 - x) = x$, oder $\tan m^0 (\tan m^0 - x) =$

$= \frac{x - b\,h}{b\,h}$, $\tan^2 m^0 - \tan m^0 . x + {}^1/_4\, x^2 = {}^1/_4\, x^2 + \frac{x - b\,h}{b\,h}$, also

$\tan m^0 = {}^1/_2\, x \pm \sqrt{{}^1/_4\, x^2 + \frac{x - b\,h}{b\,h}}$; zweitens ist $1 + \tan m^0 (\tan m^0 + y) =$

$= \frac{y}{b\,h}$, oder $\tan^2 m^0 + \tan m^0 . y + {}^1/_4\, y^2 = {}^1/_4\, y^2 + \frac{y - b\,h}{b\,h}$, also

$\tan m^0 = - {}^1/_2\, y \pm \sqrt{{}^1/_4\, y^2 + \frac{y - b\,h}{b\,h}}$.

Lehrsatz III. Es ist $x = \frac{y\left(\frac{1}{b\,h} + {}^1/_2\, y - \sqrt{{}^1/_4\, y^2 + \frac{y - b\,h}{b\,h}}\right)}{\frac{1}{b\,h} - \left({}^1/_2\, y - \sqrt{{}^1/_4\, y^2 + \frac{y - b\,h}{b\,h}}\right)}$

und $y = \frac{x\left(\frac{1}{b\,h} + {}^1/_2\, x + \sqrt{{}^1/_4\, x^2 + \frac{x - b\,h}{b\,h}}\right)}{\frac{1}{b\,h} - \left({}^1/_2\, x + \sqrt{{}^1/_4\, x^2 + \frac{x - b\,h}{b\,h}}\right)}$.

Beweis. Nach Vorigem ist ${}^1/_2\, x + \sqrt{{}^1/_4\, x^2 + \frac{x - b\,h}{b\,h}} =$

$= - {}^1/_2\, y + \sqrt{{}^1/_4\, y^2 + \frac{y - b\,h}{b\,h}}$, also ${}^1/_4\, x^2 + \frac{x - b\,h}{b\,h} =$

$= \left(- {}^1/_2\, y - {}^1/_2\, x + \sqrt{{}^1/_4\, y^2 + \frac{y - b\,h}{b\,h}}\right)^2$, oder ${}^1/_4\, x^2 + \frac{x - b\,h}{b\,h} =$

$= {}^1/_4\, (x + y)^2 - (x + y)\sqrt{{}^1/_4\, y^2 + \frac{y - b\,h}{b\,h}} + {}^1/_4\, y^2 + \frac{y - b\,h}{b\,h}$, daher

$x\sqrt{{}^1/_4\, y^2 + \frac{y - b\,h}{b\,h}} + y\sqrt{{}^1/_4\, y^2 + \frac{y - b\,h}{b\,h}} = {}^1/_4\, (x + y)^2 +$

Hosted by Google

$$+ \tfrac{1}{4}y^2 + \frac{y - bh}{bh} - \tfrac{1}{4}x^2 - \frac{x - bh}{bh} = \tfrac{1}{2}xy + \tfrac{1}{2}y^2 + \frac{y}{bh} - \frac{x}{bh},$$

oder $x\left(\frac{1}{bh} - \tfrac{1}{2}y + \sqrt{\tfrac{1}{4}y^2 + \frac{y - bh}{bh}}\right) =$

$$= \tfrac{1}{2}y^2 - y\sqrt{\tfrac{1}{4}y^2 + \frac{y - bh}{bh}} + \frac{y}{bh}, \text{ mithin}$$

$$x = \frac{y\left(\frac{1}{bh} + \tfrac{1}{2}y - \sqrt{\tfrac{1}{4}y^2 + \frac{y - bh}{bh}}\right)}{\frac{1}{bh} - \left(\tfrac{1}{2}y - \sqrt{\tfrac{1}{4}y^2 + \frac{y - bh}{bh}}\right)}.$$

Ebenſo da $\tfrac{1}{2}x + \sqrt{\tfrac{1}{4}x^2 + \frac{x - bh}{bh}} =$

$$= -\tfrac{1}{2}y + \sqrt{\tfrac{1}{4}y^2 + \frac{y - bh}{bh}}, \text{ iſt auch } \tfrac{1}{4}y^2 + \frac{y - bh}{bh} =$$

$$= \left(\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2}y + \sqrt{\tfrac{1}{4}x^2 + \frac{x - bh}{bh}}\right)^2 = \tfrac{1}{4}(x + y)^2 +$$

$$+ (x + y)\sqrt{\tfrac{1}{4}x^2 + \frac{x - bh}{bh}} + \tfrac{1}{4}x^2 + \frac{x - bh}{bh}; \; \tfrac{1}{4}y^2 + \frac{y - bh}{bh} =$$

$$= \tfrac{1}{4}(x^2 + 2xy + y^2) + x\sqrt{\tfrac{1}{4}x^2 + \frac{x - bh}{bh}} +$$

$$+ y\sqrt{\tfrac{1}{4}x^2 + \frac{x - bh}{bh}} + \tfrac{1}{4}x^2 + \frac{x - bh}{bh}, \text{ oder}$$

$$\tfrac{1}{2}xy + y\sqrt{\tfrac{1}{4}x^2 + \frac{x - bh}{bh}} - \frac{y - bh}{bh} =$$

$$= -\tfrac{1}{2}x^2 - x\sqrt{\tfrac{1}{4}x^2 + \frac{x - bh}{bh}} - \frac{x - bh}{bh}, \text{ alſo}$$

$$y\left(\frac{1}{bh} - \tfrac{1}{2}x - \sqrt{\tfrac{1}{4}x^2 + \frac{x - bh}{bh}}\right) =$$

$$= x\left(\frac{1}{bh} + \tfrac{1}{2}x + \sqrt{\tfrac{1}{4}x^2 + \frac{x - bh}{bh}}\right). \quad \text{Mithin}$$

$$y = \frac{x\left(\frac{1}{bh} + \tfrac{1}{2}x + \sqrt{\tfrac{1}{4}x^2 + \frac{x - bh}{bh}}\right)}{\frac{1}{bh} - \left(\tfrac{1}{2}x + \sqrt{\tfrac{1}{4}x^2 + \frac{x - bh}{bh}}\right)}.$$

Hosted by Google

Lehrſatz IV. Es iſt $b\,h = \frac{x\,y \pm \sqrt{x^2 y^2 - (y-x)^2}}{x+y}$.

Beweis. Nach Vorigem iſt

$x : y = \frac{1}{b\,h} + {}^1/_2\,y - \sqrt{{}^1/_4\,y^2 + \frac{y - b\,h}{b\,h}} : \frac{1}{b\,h} -$

$- \left({}^1/_2\,y - \sqrt{{}^1/_4\,y^2 + \frac{y-b\,h}{b\,h}}\right)$, daher

$x + y : y = \frac{2}{b\,h} : \frac{1}{b\,h} - \left({}^1/_2\,y - \sqrt{{}^1/_4\,y^2 + \frac{y-b\,h}{b\,h}}\right)$, alſo

$\frac{2\,y}{b\,h\,(x+y)} = \frac{1}{b\,h} - \left({}^1/_2\,y - \sqrt{{}^1/_4\,y^2 + \frac{y-b\,h}{b\,h}}\right.$;

${}^1/_2\,y - \sqrt{{}^1/_4\,y^2 + \frac{y-b\,h}{b\,h}} = \frac{1}{b\,h} - \frac{2\,y}{b\,h\,(x+y)}$, oder

${}^1/_4\,y^2 + \frac{y-b\,h}{b\,h} = \left({}^1/_2\,y + \frac{y-x}{b\,h\,(x+y}\right)^2 = {}^1/_4\,y^2 + \frac{y\,(y-x)}{b\,h\,(x+y)} +$

$+ \left(\frac{y-x}{b\,h\,(x+y)}\right)^2$; daher $y - b\,h = \frac{y\,(y-x)}{x+y} + \frac{1}{b\,h}\left(\frac{y-x}{x+y}\right)^2$. Oder es iſt:

$\left(\frac{y-x}{x+y}\right)^2 = b\,h\left(y - \frac{y\,(y-x)}{x+y}\right) - b^2\,h^2 = \frac{2\,b\,h\,.\,x\,y}{x+y} - b^2\,h^2$, oder

$b^2\,h^2 - \frac{2\,b\,h\,.\,x\,y}{x+y} + \left(\frac{x\,.\,y}{x+y}\right)^2 = \left(\frac{x\,y}{x+y}\right)^2 - \left(\frac{y-x}{x+y}\right)^2$, folglich

$b\,h = \frac{x\,y}{x+y} \pm \sqrt{\frac{x^2 y^2 - (y-x)^2}{(x+y)^2}} = \frac{x\,y \pm \sqrt{x^2 y^2 - (y-x)^2}}{x+y}$.

Lehrſatz V. Es iſt $\tan m^0 = \frac{y-x}{x\,y \pm \sqrt{x^2 y^2 - (y-x)^2}}$.

Beweis. Nach dem vorigen Satze war $b\,h = \frac{x\,y \pm \sqrt{x^2 y^2 - (y-x)^2}}{x+y}$,

auch war nach Lehrſatz I. $b\,h = \frac{y-x}{(x+y)\tan m^0}$, alſo iſt auch

$\frac{y-x}{(x+y)\tan m^0} = \frac{x\,y \pm \sqrt{x^2 y^2 - (y-x)^2}}{x+y}$, daher

$\tan m^0 = \frac{y-x}{x\,y \pm \sqrt{x^2 y^2 - (y-x)^2}}$.

Hosted by Google

Lehrſatz VI. Es iſt $\cos 2\,m^0 = \frac{\sqrt{x^2y^2-(y-x)^2}}{xy}$, und

$$\tan 2\,m^0 = \frac{y-x}{\sqrt{x^2y^2-(y-x)^2}}.$$

Beweis. Es war $\sin 2\,m^0 = \frac{y-x}{xy}$, daher

$\cos 2\,m^0 = \sqrt{1-\sin 2\,m^0}^2$, $\cos 2\,m^0 = \sqrt{1-\left(\frac{y-x}{xy}\right)^2} =$

$= \frac{\sqrt{x^2y^2-(y-x)^2}}{xy}$, und $\tan 2\,m^0 = \frac{\sin 2\,m^0}{\cos 2\,m^0}$, oder

$$\tan 2\,m^0 = \frac{y-x}{\sqrt{x^2y^2-(y-x)^2}}.$$

Lehrſatz VII. Es iſt $\tan 2\,m^0 . \tan m^0 : \tan 2\,m^0 - \tan m^0 = y-x : xy$, und $\cos 2\,m^0 : \cot 2\,m^0 = y-x : xy$.

Beweis Es iſt

$$\tan 2\,m^0 ; \tan m^0 = \frac{y-x}{\sqrt{x^2y^2-(y-x)^2}} : \frac{y-x}{xy \pm \sqrt{x^2y^2-(y-x)^2}},$$

$\tan 2\,m^0 : \tan m^0 = xy + \sqrt{x^2y^2-(y-x)^2} : \sqrt{x^2y^2-(y-x)^2}$. Mithin

$\tan 2\,m^0 - \tan m^0 : \tan m^0 = xy : \sqrt{x^2y^2-(y-x)^2}$, und

$$\frac{\tan 2\,m^0 - \tan m^0}{\tan m^0} : \tan 2\,m^0 = \frac{xy}{\sqrt{x^2y^2-(y-x)^2}} : \frac{y-x}{\sqrt{x^2y^2-(y-x)^2}},$$

daher $\tan 2\,m^0 . \tan m^0 : \tan 2\,m^0 - \tan m^0 = y-x : xy$.

Zweitens da $\tan 2\,m^0 = \frac{y-x}{\sqrt{x^2y^2-(y-x)^2}}$, ſo iſt

$\cot 2\,m^0 = \frac{\sqrt{x^2y^2-(y-x)^2}}{y-x}$, alſo

$$\cos 2\,m^0 : \cot 2\,m^0 = \frac{\sqrt{x^2y^2-(y-x)^2}}{xy} : \frac{\sqrt{x^2y^2-(y-x)^2}}{y-x} = y-x : xy.$$

Das ſind die Formeln, welche ich bei meinen Selbſtbeſchäftigungen mit der Mathematik am 25. September 1845 auffand. Die vorhergehenden Lehrſätze, die dazu führen, ſind hier im Zuſammenhang nach einander aufgeführt, ſie finden ſich aber vereinzelt in V von den Abſchnitten der trigonometriſchen Linien. Es werden uns nun die Formeln des Lehrſatzes VII den richtigen Begriff des wahren mathematiſchen Unendlichen bringen, wie ich dieſes ſchon in meiner Druck-

Hosted by Google

schrift „Das Unendliche“ aus dem Jahre 1880, Seite 28 angegeben habe. Ich wiederhole hier folgendes:

Ist $\tan m^0$ die $\tan 45^0$, so ist $\tan 2m^0$ also die $\tan 90^0$, und dann hat man $y - x : xy = \infty . 1 : \infty - 1$, da aber dann auch nach dem Vorhergehenden Seite 239 $y - x = xy$, so folgt, daß $\infty . 1 = \infty - 1$, ebenso $1 = \frac{\infty . 1}{\infty - 1}$ mithin $\infty . 1 = (\infty - 1) . 1$, oder $\infty = \infty - 1$, daher $\infty = \infty . 1$, und $\frac{\infty}{\infty} = 1$. Aus der Gleichung $\infty . 1 = \infty - 1$ folgt, daß $1 = \frac{\infty}{\infty} - \frac{1}{\infty} =$ $= 1 - \frac{1}{\infty}$, daher $\frac{1}{\infty} = 1 - 1 = 0$, mithin auch $1 = 0 . \infty$, und $\frac{1}{0} = \infty$, ebenso $\infty - \infty = \frac{1}{0} - \frac{1}{0} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0} = 1$, weil $0 = 0 . 1$.

Da $\infty = \infty . 1$, so auch $\frac{\infty}{1} = \infty = \frac{1}{0}$, daher $0 : 1 = 1 : \infty$. Statt 1 kann man nun jede endliche Größe setzen. Denn da $0 . A^2 = 0 = \frac{0}{A^2}$, so ist auch $\frac{0}{A^2} : 1 = 1 : \infty$, oder $0 : A = A : \infty$, und weil $\frac{1}{\infty} = 0 = \frac{A . 1}{\infty}$, so auch $0 . \infty = A$, und $\frac{A}{0} = \infty$, oder $\infty = \frac{A . 1}{0} = A . \infty$, daher $\frac{\infty}{\infty} = A$ und $\infty - \infty =$ $= \frac{A . 1}{0} - \frac{A . 1}{0} = \frac{A(1-1)}{0} = \frac{A . 0}{0} = A . 1 = A$, also auch $\infty = \infty + A = \infty - A$.

Das Unendliche ist also nicht so wie die Mathematiker angeben ein so unbestimmtes Etwas, woraus man doch bei aller Mühe es zu begreifen sich keinen rechten Begriff bilden kann, sondern es ist ein solches Festes, Bestimmtes, welches allem Endlichen so viel ist, wie das Endliche selber dem Nichts, d. h. dem Nichtseienden, was bloß der Möglichkeit nach nicht aber der Wirklichkeit nach etwas ist. Zugleich aber erfahren wir damit, daß auch dem Nichts, der Null oder dem Nichtseienden ein gewisses Sein zukommen müsse, welches Nichtseiende also sehr wohl unterschieden werden muß von dem Nichts, was durchaus unmöglich oder ein Widerspruch in sich ist. Ich möchte daher auch im Ausdruck beim Schreiben dieses unmögliche Nichts, diese unmögliche Null dadurch von dem möglichen Nichts der möglichen Null unterscheiden, daß ich erstere durchstrichen bezeichne $\not{0}$, letzteres undurchstrichen lasse, 0. Es muß also ein dreifaches Sein geben, ein Unendliches, Endliches und Nichtseiendes, welche Sein am meisten den Ausdrücken, dem Nothwendigen, dem bloß Wirklichen und dem bloß Möglichen entsprechen.

Hosted by Google

Welche Aussichten eröffnen sich aber nun durch die Auffindung eines solchen Unendlichen. Alles Auseinandergehen bei der Bestimmung desselben zwischen den Mathematikern und den Philosophen hört auf, und die Mathematik wird wieder, was sie sein soll, eine Vorschule und Stütze der Philosophie. Welche Fragen lassen sich jetzt nicht lösen, oder doch weiter bringen, an denen man früher vergebens sich fast bis zur Verzweiflung abgemüht hat, und doch hielt man diese Fragen über das Unendliche namentlich über die Unendlichkeit oder Endlichkeit der Welt, u. s. w. für so wichtig, daß Kant in seiner Kritik der reinen Vernunft die Aeußerung that (S. 491. 3. Ausgabe 1790), es wären dieses Fragen, um deren Auflösung der Mathematiker gerne seine ganze Wissenschaft dahin gäbe. Nun möchte ich zwar wohl dieses nicht behaupten, denn der Mathematiker wird und muß seine Wissenschaft zu vielem Andern, gewiß Nothwendigerem gebrauchen; denn im Grunde genommen sind diese Fragen nur solche, daß durch ihre Lösung doch nur eine große Neugier befriedigt werden würde; auch leuchtet es nicht ein, daß der Nutzen so groß sein werde, da man auch selbst den Grund, warum es sich so verhält, ohne Mathematik nicht einsehen würde. Wir hätten alsdann etwas, dem wir nach Autorität, weil es so gesagt worden, Glauben schenkten, und dann wie kann man anders als auf mathematische Weise zu solcher Ueberzeugung gelangen. Wir würden uns daher, gäben wir die Mathematik weg, selber der Mittel berauben, durch die allein diese Wahrheit aufgefunden werden kann, wenn sie überhaupt für den Menschen zu finden möglich ist. Was für Schlüsse sich aber aus unserm Unendlichen hierfür ergeben, darüber verweise ich auf die Schrift „Das Unendliche vom Jahr 1880“ Seite 40 u. s. w. Gewiß wird man nicht mehr in dem Sinn von einer unendlichen Welt sprechen können, daß unsere Erdenwelt z. B. davon einen Theil ausmachte, weil das Endliche, Begrenzte auch nicht ein Theil des Unendlichen sein kann, da das Endliche dem Unendlichen ebenso ein Nichtseiendes, ein Nichts ist, wie das für uns Nichtseiende, das Nichts es dem Endlichen ist, $\infty - \infty = A$, $A - A = 0$. Das hatte auch schon Aristoteles eingesehen, daß wenn der Theil ein Begrenztes, das Endliche ist, so auch das Ganze ein Begrenztes sein müsse, nicht aber ein Unbegrenztes, und Unendliches sein könne. Das Unendliche suchte er daher nicht in dem Endlichen, sondern bloß in dem Gedanken, (*γνώσει*), daher auch die wirkliche Theilung des Körperlichen bis ins Unendliche nicht zustande kommen könne. Doch irrte Aristoteles nun darin, daß er das Unendliche überhaupt bloß für ein Zufälliges, für ein nicht Seiendes hielt, nicht aber als etwas, was nothwendig dem Endlichen vorausgehe, und die Bedingung desselben sei, wodurch das Endliche werden könne, wie es Plato und andere Philosophen dachten. Nun aber wird mathematisch gezeigt, daß das Endliche aus dem Unendlichen hervorgehen kann auf zweifache Weise $\infty - \infty = A$ und $0 . \infty = A$.

Hosted by Google

Sonst wohl wird jede Größe mit 0 multiplicirt wieder gleich 0, aber das Unendliche ist auch nicht das Endliche, sondern selbst ein Nicht-Endliches, das Gegentheil vom Endlichen, deßhalb auch $0.\infty = A$. S. das Unendliche 1880. Seite 30. Es läßt sich dieses auch leicht einsehen, wenn wir statt des Unendlichen setzen eine unendliche Kraft, einen unendlichen Geist, daher $0.\infty$ heißt: das Nichtseiende wird durch unendliche Kraft zu einem Endlichen. Somit enthüllt sich uns etwas besser selbst das Vorgehen einer Schöpfung. Aus dem Nichts ist durch eine unendliche Kraft das Endliche geschaffen.

Trotzdem daß Aristoteles gegen eine Unendlichkeit der endlichen Welt geredet, kommt nach ihm immer wieder diese Unendlichkeit der Endlichkeit vor, sowohl in der Evolutionslehre als auch in den andern pantheistischen und materialistischen Systemen, bei welchen allen das Unendliche uns zu etwas wird, wovon man keinen Begriff sich bilden kann, da es ein fortgesetztes Endliches sein soll, und so haben es denn nun auch die Mathematiker angenommen. Dabei blieb immer, wie mit Recht oft erinnert worden, die schwer zu lösende Frage, wann hört das Unendliche auf, und ist ein Endliches, oder wie wird aus dem Unendlichen das Endliche. Wir aber haben nun endlich mathematisch die Antwort: Das Unendliche ist nichts vom Endlichen, aber das Unendliche ist die Bedingung des Endlichen, dieses wird aus dem Unendlichen zweifach wie gesagt,
$\infty - \infty = A, 0.\infty = A$.

3. Folgerungen, die uns nunmehr aus dem richtig und mathematisch gefundenen Begriff des Unendlichen in der Infinitesimalrechnung werden.

Ist der unendliche Theil einer Größe ein Nichts von dieser Größe selbst, und macht dieses Nichts unendlichmal genommen die Größe selbst aus, so muß die bisher nur uneigentlich sogenannte Infinitesimalrechnung in der eigentlichsten Bedeutung eine Infinitesimalrechnung, eine Rechnung des Unendlichen werden. Denn nun ist das Differential dx als unendlicher Theil von x ein Nichts gleich Null, und unendlichmal im eigentlichen Sinne dieses dx genommen gibt wieder x. Aus dem Nichts dx wird hier x, wenn man unter dem unendlichmal die Kraft der Bewegung zwischen zwei Punkten oder Räumen von einem zum andern versteht. Man hat nun dadurch eine große Vereinfachung. Denn nicht mehr braucht man nun, um das Differential dx zu erhalten, eine bestimmte endliche Größe sich allmählich verkleinern lassen, d. h. aus einem merkbaren Unterschied zu einer Grenze von 0, sondern das Differential ist einfach der Durchschnitt einer Linie, einer Fläche, eines Körpers, ein Punkt, eine Linie, eine Fläche. Man erhält nun auch dadurch genauer das Integral, z. B. wenn man hat $\int_{-1}^{+1} d.\arc.\sin.x = \pi$, oder $\int_{+1}^{-1} d.\arc.\cos.x = \pi$, so wird im erstern Falle

Hosted by Google

der Kreisbogen bestimmt von Anfang des vierten Quadranten, wo die Sinusse negativ werden bis zum Anfangspunkt 0, von — 1 bis 0, und dann positiv bis zu Ende des ersten Quadranten von 0 bis + 1; im zweiten Falle wird der Kreisbogen bestimmt von Anfang des ersten Quadranten, wo die Cosinusse positiv sind von + 1 bis 0 bis zu Ende dieses Quadranten, und dann negativ werden von — 0 bis — 1, von Anfang des zweiten Quadranten bis Ende desselben. In diesen beiden Fällen werden, wenn $dx = 0$, bloße Scheidung der Linie ist, alle möglichen Sinusse und alle möglichen Cosinusse zwischen den bestimmten Grenzen angegeben, und man erhält also dann genau den Kreisbogen; dagegen wenn das Differential ein noch so kleiner Theil einer Linie ist, so erhält man durch das Integral statt des genauen Kreisbogens eigentlich nur ein mit dem Kreisbogen fast genau übereinstimmendes halbes Polygon von noch so vielen Seiten. Bei den Sinussen vollziehen sich alle möglichen Scheidungen auf der ersten Hälfte des Durchmessers, welcher den ersten und zweiten Quadranten vom dritten und vierten trennt, bei den Cosinussen auf der ersten Hälfte des Durchmessers, welcher den vierten und ersten Quadrant vom zweiten und dritten trennt. Oder auch vom Mittelpunkt aus werden durch alle möglichen Scheidungen des einen ganzen Durchmessers, welcher den ersten und vierten Quadrant vom zweiten und dritten trennt, alle Sinusse innerhalb der gegebenen Grenzen erhalten, und alle Cosinusse durch alle mögliche Scheidungen des zweiten Durchmessers, welcher den ersten und zweiten Quadranten vom dritten und vierten trennt.

Während die Mathematiker sagen, daß das Differential einer Größe, wenn sie veränderlich ist, also dx eine von Null verschiedene ganz kleine der Null angrenzende Größe sei, behaupten sie zugleich, daß wenn man von einer sich stets gleich bleibenden Größe, welche man eine Constante nennt, das Differential nimmt, daß dann dieses Differential gleich Null sei. Navier I. Seite 282: das Differential einer Constante ist stets Null. Das ist nun aber freilich ein sehr ungenauer Ausdruck, und kann leicht zu Mißverständnissen und grobem Irrthume führen. Denn es war gesagt worden, daß das Differential eine noch so kleine unangebbare Größe sei, die nicht selbst Null sei, sondern nur einen der Null angrenzenden Werth habe, und sie wurde eine unendlich kleine Größe genannt. Setzt man also hier statt Differential unendlich kleine Größe, so heißt es, die unendlich kleine Größe einer Constante ist stets Null. Das können aber doch die Mathematiker unmöglich meinen, sie würden ja in offenbaren Widerspruch mit sich selbst kommen; denn der unendliche Theil muß eben ein unendlicher Theil sein, und es ist hier gleichviel, ob die Größe constant oder veränderlich ist Es ist nur der Unterschied, daß der unendliche Theil, wie jeder Theil einer Theilung bei der constanten Größe sich stets gleich bleibt, bei der veränderlichen bald größer

Hosted by Google

bald kleiner werden muß, je nachdem die Größe selbst größer oder kleiner wird. So wenn man von einer Größe den vierten Theil nimmt, so wird dieser Theil immer der vierte Theil und mehr als nichts sein, nur bei der constanten Größe bleibt sich dieser vierte Theil immer gleich, bei der veränderlichen ändert er sich nach der Aenderung der Größe. Aehnlich ist dieß also beim unendlichen Theil. Versteht man also unter Differential den unendlichen Theil, so kann man unmöglich behaupten, daß das Differential der Constante gleich Null sei. Entweder dann wenn das Differential der Constante gleich Null ist, so ist es auch das Differential der veränderlichen, oder wenn das Differential der veränderlichen nicht gleich Null ist, so ist es auch nicht das Differential der Constante; anders kann es nicht möglich sein. Aber mit dem Ausdruck Differential meinen die Mathematiker hier wohl das Differiren, Verschiedensein, und dann heißt es das Differiren, Verschiedensein der Constante mit sich selber ist stets Null, die Constante wird nicht bald größer bald kleiner wie die veränderliche Größe, sondern bleibt sich stets gleich. Dann ist es ein identischer Satz, und bedarf keines Beweises, wie man auch gewöhnlich einen solchen nicht weiter gibt. Nur Lipschitz in seiner Analysis (II. §. 6. S. 23, 24 u. S. 27) versucht einen Beweis zu geben. Der Beweis ist aber nichts weiter, als daß eine Constante eben nur eine Constante, und die veränderliche Größe veränderlich sei. Da nemlich die Constante c sich stets gleich bleibt, weder größer noch kleiner wird, so wird gezeigt, daß sie kein Differential hat, welches einen Zuwachs bringt, oder daß dann $dc = 0$ sei, nun wird statt dessen allgemein dahingestellt, daß $dc = 0$ sei.

Das nun, diese ungenaue, leicht mißzuverstehende Angabe über das Differential der Constante hat Lipschitz mit den andern Mathematikern gemein. Aber eigen ist ihm ein Irrthum, worin er gerathen ist, eben durch die ungegründete Behauptung, daß der unendliche Theil einer Größe nicht gleich 0 sei, sondern einen der Null angrenzenden Werth habe; er behauptet nemlich, die Null dürfe niemals als Divisor eines Bruches vorkommen. Bisher hatte man mit der Null ebenso verfahren wie mit den andern ganzen Zahlen und gesagt und geschrieben $\frac{1}{0}$, $\frac{A}{0}$, $\frac{0}{0}$ und selbst diese Null da gesetzt, wo nur ein der Null angrenzende Werth stattfinden sollte, daher eben so geschrieben $0 . \infty = 1, \frac{1}{0} = \infty$ u. s. w. Lipschitz hat nun diese sogenannte mathematische Null nicht, und wendet die Null nur in ihrer eigentlichen Bedeutung an, wodurch er dann, wie zu erwarten, darauf kommen mußte, daß 0 als Divisor unstatthaft sei. Ja er bringt dafür einen Beweis. In seiner Analysis I. §. 12 S. 27 sagt er: „einen Bruch $\frac{f}{m}$ durch einen Bruch $\frac{f'}{m'}$ dividiren heißt einen Bruch aufsuchen, der mit

$\frac{f'}{m'}$ multiplicirt den Bruch $\frac{f}{m}$ ergibt; diese Aufgabe wird nur durch den Bruch $\frac{f\,m_1}{m\,f_1}$ gelöst. Wäre nun $\frac{f_1}{m_1} = 0$, so kann, wofern man $\frac{f}{m}$ von Null verschieden nimmt, kein Bruch existiren, der mit $\frac{f_1}{m_1}$ multiplicirt, gleich $\frac{f}{m}$ würde, weil jedes Produkt von Brüchen, bei denen einer der Faktoren gleich Null ist, den Werth Null annehmen würde". Dieses würde alles richtig sein, wenn auch $0 . \infty$ gleich Null wäre, wie es eigentlich bisher genau genommen die Mathematiker geglaubt haben. Aber nun ist $0 . \infty$ niemals gleich 0, sondern immer eine endliche Größe 1 oder A, und also auch $\frac{1}{0} = \infty$, und dadurch zerfällt der ganze Beweis in Nichts und ist ein unrichtiger Beweis. Durch diese seine Behauptung (man vergleiche noch hierüber I. §. 16, S. 41, I. 21, S. 61, II. §. 38, S. 197) hat sich Lipschitz selbst viele unnöthige Mühe und Arbeit geschaffen, da er bei den Aufgaben und Integrationen immer darauf zu sehen hatte, wenn 0 als Divisor vorkommen sollte, daß statt dessen die nur angrenzenden Werthe gestellt wurden, aus denen dann freilich ebenso aber mühsam das Resultat geschlossen wurde. Da ihm der Gebrauch der Division verlangt, daß der jedesmalige Divisor nicht gleich Null sei, so stellt er die Operation der Division im Gegensatz zu denen der Addition, Subtraktion und Multiplikation I. § 21, S. 61, ja er beginnt seinen zweiten Theil der Analysis damit, daß dieser Gegensatz das ganze Gebiet der Analysis beherrsche. Wunderbare und befremdende Behauptung! Hat man doch bisher geglaubt, daß die Division nur eine irgendwie vielfache Subtraktion, wie die Multiplikation eine vielfache Addition sei. Wie kann nun ein Gegensatz zwischen zwei Operationen stattfinden, die sich nur dadurch unterscheiden, daß die eine eine einfache, die andere eine vielfache ist. Es unterscheidet sich also die Division nicht mehr von der Subtraktion, wie die Multiplikation von der Addition, und die Subtraktion unterscheidet sich eben auf dieselbe Weise von Addition und Multiplikation, wie die Division, da diese ja nur eine Subtraktion ist. Die Subtraktion ist die Umkehrung der Addition, wie die Division die Umkehrung der Multiplikation ist. Dieses sagt auch Lipschitz selbst aus I. §. 104. S. 497.

Wenn man nun einmal in einen Irrthum gerathen ist, so bleibt es gewöhnlich nicht dabei, sondern der Irrthum führt wieder weitere Irrthümer mit sich. Wollt man einmal zugeben, daß 0 nicht als Divisor vorkommen dürfe, so muß man nun auch annehmen, daß die algebraischen Ausdrücke der Buchstaben a, b, c nicht immer so gebraucht werden könnten, daß man für einen derselben jeden beliebigen Werth mit Einschluß der 0 setzen dürfe. In der

Hosted by Google

Gleichung $\frac{a}{b} = c$ darf b nicht gleich 0 angenommen werden; überträgt man aber b als Faktor auf die andere Seite, so daß man hat $a = b \cdot c$, dann kann b auch gleich 0 sein. Also b das eine mal mit Einschränkung gesetzt, das andere mal unbeschränkt bei bloßer Uebertragung auf die andere Seite. Da fehlt aber alle Begründung, und sieht mehr aus, wie eine launige Spielerei, welche man doch dem Verstandesgesetze nicht zurechnen darf. Alle sonst noch so festen Grundregeln kommen dadurch ins Schwanken, oder müssen sich eine Einschränkung gefallen lassen. Aber es ist nicht der Fall, wie Lipschitz im Anfange des zweiten Bandes sagt: dieser Gegensatz der Division äußert sich von den Elementen an stets auf neue Weise, sondern der erste Irrthum bringt immer weiter neue und neue Irrthümer mit sich.

Daß nun aber die Null als Divisor zulässig sei, läßt sich leicht direkt dadurch beweisen, daß Division nichts weiter als Subtraktion ist, und bei dieser die zu subtrahirende Null zulässig ist. Wir wollen die Zulässigkeit der Null bei allen Grundoperationen, Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division nun beweisen, zuerst aber noch angeben, wie die Division nur eine bloße Subtraktion ebenso wie die Multiplikation eine bloße Addition ist. Wenn man hat z. B. $3 \cdot 4 = 12$, so heißt dieses nichts weiter, als 4 Einheiten 3mal gesetzt geben zusammen addirt 12, das Resultat ist die Addition der so und so vielmal gesetzten Anzahl von Einheiten. Wenn man nun hat $\frac{12}{4} = 3$, so heißt dieses nichts weiter, als man soll von 12 dem Dividendus das 4, den Divisor abziehen, von dem was noch bleibt, wieder 4 abziehen, und dieses so vielmal thun, bis das anfängliche 12 in 0 aufgeht. Das wie viel ist das Resultat der Division. Zieht man von 12 ab 4, so erhält man 8, davon 4 abgezogen bleibt 4, davon wieder 4 abgezogen bleibt 0. Dreimal muß man also 4 abziehen, bis 12 aufgeht in 0. Daher ist das Resultat der Division 3, eine ganze Zahl. Nicht immer aber erhält man eine ganze Zahl. Wenn man nemlich hat $\frac{15}{4}$ und zieht von 15 ab 4, so erhält man 11, davon 4 abgezogen bleibt 7, davon 4 bleibt 3. Nun kann man von 3 die 4 nicht abziehen, dieses ist eine Einschränkung der Subtraktion aber nicht der Division als solcher für sich. Man hat im Ganzen 3mal abgezogen, beim 4ten mal kann man nur 3 Einheiten von den 4 Einheiten, die als ein Ganzes zu denken sind, abziehen, aber nicht das ganze 4; 3 Einheiten aber von 4 Einheiten nennt man $\frac{3}{4}$, folglich gibt $\frac{15}{4} = 3\frac{3}{4}$.

Hosted by Google

Nun der Beweis, daß Null, 0, bei allen vier Grundoperationen, Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division ohne Einschränkung zuläſſig ſei.

Wenn Jemand ſagt, er habe 5 Mark erhalten, und nichts weiter, ſo wird durch den Zuſatz „und nichts weiter" nichts anderes ausgeſagt, als wenn der Zuſatz nicht dabei wäre. Wie man aber dennoch oft ſich alſo ausdrückt, um mit mehr Nachdruck zu reden, ſo wird es alſo auch erlaubt ſein zu ſchreiben $5+0$ ſtatt bloßes 5, und dieſes 5 erſterem Ausdrucke gleich zu ſetzen, $5+0=5$. Ebenſo wie man ſagt 5 Mark und nichts weniger, ſo darf man auch ſchreiben $5-0$, und ſetzen $5-0=5$. Wie man ſagt 5mal Nichts erhalten, oder keinmal 5 Mark, ſo darf man auch ſchreiben $5.0=0$, und $0.5=0$. Wie ſtehts nun bei der Diviſion? Beim Dividendus wird die Zuläſſigkeit der Null nicht bezweifelt, und läßt ſich auch leicht einſehen. Denn iſt der Dividendus 0, mag 0 allein vorkommen, oder gemeinſamer Faktor aller endlichen Glieder ſein, und iſt der Diviſor eine endliche Zahl, alſo $\frac{0}{5}$, $\frac{0}{a}$, ſo kann man ſtatt 0 auch 0mal 1 ſetzen, und dann hat man eine Multiplikation $0.\frac{1}{5}$, oder $0.\frac{1}{a}$, und dieſes gibt 0. Oder man betrachtet die Diviſion als Subtraktion, dann heißt $\frac{0}{5}$, $\frac{0}{a}$, von 0 ſoll 5 oder a abgezogen werden bis 0 aufgeht in 0, die Zahl 0 iſt aber ſchon 0, alſo darf keinmal der Abzug ſtattfinden, daher $\frac{0}{5}=0$, $\frac{0}{a}=0$. Iſt aber nun der Diviſor 0, wie $\frac{5}{0}$, $\frac{a}{0}$, ſo muß man, um den Dividendus 5 oder a in 0 aufgehen zu machen, immer ohne Ende den Abzug machen, und wird damit nicht fertig, daher muß auch nun $\frac{5}{0}=\infty$, und überhaupt $\frac{a}{0}=\infty$ ſein, und deßhalb auch $a=0.\infty$, $\frac{a}{\infty}=0$. So kann man ohne Weiteres die Lehre des Unendlichen aus dem bloßen Begriff der Diviſion als Subtraktion gewinnen. Denn in dieſer läßt ſich immer ſagen und ſchreiben, wie wir geſehen haben $5-0=5$, $a-0=a$, alſo auch dieſes mehrmals, von a iſt nichts abzuziehen, und wieder nichts und unendlich mal nichts. Dieſe mehrfache Subtraktion iſt aber nun eine Diviſion $\frac{a}{0}$, und das Reſultat dieſer Diviſion iſt das wie viel, das unendlich; um alſo dieſes im Schreiben auszudrücken, muß man, nicht bloß darf man ſchreiben $\frac{a}{0}=\infty$.

Hosted by Google

Mithin ist aufs strengste bewiesen, daß in der Division die Null als Divisor zulässig sei.

Wenn man nun zu einer beliebigen Zahl eine gewisse andere Zahl addirt, dann auch von derselben subtrahirt, so ist immer die erste beliebige Zahl die mittlere arithmetische Proportionalgröße zwischen dem Addirten und dem Subtrahirten. Es sei die beliebige Zahl 12, dazu werde addirt 4, dann hat man 16, dann werde 4 von 12 abgezogen, so erhält man 8. Nun ist $8-12=12-16$. Die Zahl sei 4, dazu werde addirt -2, wodurch man 2 erhält, dann werde von 4 abgezogen -2, wodurch man 6 erhält, so ist $6-4=4-2$.

Multiplizirt man eine beliebige Zahl mit einer gewissen andern Zahl und dividirt auch die beliebige Zahl durch dieselbe andere Zahl, so ist die erste beliebige Zahl die mittlere geometrische Proportionalgröße zwischen dem Dividirten und dem Multiplizirten. Es sei die beliebige Zahl 12, damit 4 multiplizirt gibt 48, und 12 durch 4 dividirt gibt 3, daher ist nun auch $3:12=12:48$. Die beliebige Zahl bleibe 12, die andere Zahl, womit multiplizirt und dividirt wird, sei 0, so muß sein $\frac{12}{0}:12=12:12\,.\,0$, oder auch $\frac{1}{0}:\frac{12}{12}=\frac{12}{12}:0$, das ist $\infty:1=1:0$.

So kann man auch ohne auf den trigonometrischen Satz zurückzugehen, auf solche und auch noch auf manche andere Art den Begriff des Unendlichen finden, und überall die Bestätigung dessen, was wir darüber zuerst aufgestellt haben. Es haben aber auch die Mathematiker, wohl ohne daß sie es wußten, mit dem Unendlichen auf diese einzig richtige Art zu rechnen verfahren, vorzüglich da, wo sie nach den Definitionen und Erklärungen der alten griechischen Mathematiker ihre Rechnungen und Constructionen ausführten. So erklärten die alten Mathematiker, daß die Fläche ein Nichts sei vom Körperlichen, die Linie ein Nichts von der Fläche, und der Punkt ein Nichts von der Linie. Siehe in der Schrift „Das Unendliche 1880, S. 36“ und daselbst Cic. Acad. II. c. 36. Nun konstruiren die Mathematiker die Fläche aus der Linie, daß diese sich in der Ebene eine Raumeslänge fortbewege, ebenfalls den Körper aus der Fläche, daß diese sich im Raume fortbewege. Da sie nun aber auch annehmen, daß ein Körper unendliche Flächen enthalte, eine Fläche unendliche Linien, so muß ja auch $0\,.\,\infty=1$, gleich, wenn 0 Linie, einer Fläche, und wenn 0 eine Fläche, gleich einem Körper sein. Durch die unendliche Kraft der Bewegung innerhalb einer gewissen Grenze als zweiter Dimension wird aus der Linie die Fläche, und als dritter Dimension wird aus der Fläche der Körper u. s. w. Es ist dieses nichts weiter als eine Integration nach vorgestreckten Grenzen aus einem Differential, welches im eigentlichen Sinne ein Nichtseiendes, eine Null ist. Ebenso ist in der Stereometrie der Archimedeische Satz über das Verhältniß des Kegels,

Hosted by Google

der Kugel und des Cylinders zu einander nichts anderes als ein Integral aus Differentialen, die alle den Werth Null haben, da bei jedem Durchschnitt von Cylinder, Kugel und Kegel die Kreisfläche des Cylinders weniger der des Kegels gleich der Kreisfläche der Kugel ist, aber Cylinder, Kugel und Kegel unendliche Kreisflächen haben in ihren abgesteckten Grenzen. Einer weitern besondern dritten Dimension bedarf es nicht; denn statt aller unendlichen Kreisflächen kann man sich eine Kreisfläche des Cylinders, eine der Kugel und eine des Kegels denken, die zu unterst durch Bewegung bis nach oben zum Ende geführt werden, also die unendliche Kraft der Bewegung zwischen den bestimmten Grenzen als einer Dimension bringt aus den Flächen als je zwei Dimensionen die Körper hervor. Da dann der ganze Kegel $^1/_3$ des Cylinders ist, so ist auch die Kugel gleich $^2/_3$ des Cylinders. Hierbei ist nur zu bemerken, daß man beim Beweise gewöhnlich nur die Halbkugel nimmt, und wenn die ganze Kugel, so ist auch Cylinder noch einmal so groß, und der Kegel ist ein Doppelkegel, für den man dann einen Kegel von doppelter Höhe und gleicher Grundfläche setzen kann.

Das ist der richtige Beweis des Archimedeischen Satzes, und ganz zu verbannen ist aus den Lehrbüchern der Beweis, wo man den Kreis mit Trapezen umgibt, und ein kleines Kugelstück für gleich einem kleinen abgekürzten Kegel nimmt. Denn bei den Trapezen muß die untere eine Hälfte der kleinen Tangente als gleich für ein kleineres Kreisstück genommen werden, die obere gleiche andere Hälfte für ein größeres Kreisstück, und das Verhältniß dieser Kreisstücke wird immer ungleicher, je weiter oben das Trapez an den Kreis gelegt ist. Dadurch kann ja der Satz nicht genau bewiesen werden. Siehe II der stereometrische Satz des Archimedes.

Nachdem wir also über das Wesen und den Begriff des Unendlichen solche gewisse und sichere Bestimmungen aufgefunden, daß daran ferner zu zweifeln nicht einmal möglich ist, so werden wir nun auch ferner jede weitere Rechnung desselben mit größerer Einfachheit und Genauigkeit vollführen, als dieses bisher bei dem ungewissen und schwankenden Begriff desselben geschehen konnte. Sonst wird es im Ganzen keiner weitern Abänderung bedürfen, und auf dieselbe Weise, aber doch auch zuversichtlicher wird der Gang der Untersuchung und Ausforschungen sein. Jedoch eine völlige Ausnahme wird mit den sogenannten imaginären, oder wie man nach dem Vorgange von Gauß sie zu nennen beliebt, complexen Größen zu machen sein, insoweit sie in das Gebiet der Infinitesimalrechnung hinein gezogen werden. Das Verfahren hiermit, wie es bis jetzt geschehen, ist ganz und gar zu verwerfen, da es auf der größten Unrichtigkeit und den gröbsten Irrthümern beruht. Ueber alles dieses verweise ich auf meine Schrift, herausgegeben im Jahre 1881 Stuttgart „Die imaginären Größen und ihre Auflösung".

Hosted by Google

4. Weitere Folgerungen und Rechnungen mit dem Unendlichen.

In dem Folgenden werden wir uns hauptsächlich damit beschäftigen, daß wir zeigen, welche weitere Rechnungen man nunmehr mit dem von uns aufgefundenen wahren Unendlichen machen kann, besonders wenn man dasselbe in Verbindung bringt mit den endlichen Größen und dem Nichtseienden. Es wird zumeist dasjenige hier wiedergegeben, was ich mir schon in früheren Jahren gleich nach der von mir gemachten Entdeckung aufgezeichnet hatte. — Da man hat, wie wir oben gesehen $\infty = \infty + A$, und $\infty = \infty - A$, so folgt daraus der Satz:

I. Wenn man zu dem Unendlichen eine gewisse endliche Größe addirt, oder auch von demselben subtrahirt, so erhält man wieder ein Unendliches;

und da man hat $\infty = \infty . A$ und $\infty = \frac{\infty}{A}$, so folgt:

II Wenn man das Unendliche mit einer endlichen Größe multiplizirt, oder auch durch eine solche dividirt, so erhält man wieder ein Unendliches.

Wie man auch früher in der Differentialrechnung annahm, daß das Differential, also dx, welches einen der 0 angrenzenden Werth haben sollte, dennoch immer im Sinne des Ganzen, des Integrals zu nehmen sei, also wenn x Linie auch dx Linie, wenn x Fläche auch dx Fläche, wenn x Körper, auch dx Körper sei, so muß man auch nun, da wir $dx = 0$, gleich einem Nichtseienden setzen, dieses Differential im Sinne des Ganzen nehmen, also entweder nichtseiende Linie, d. i. Punkt, oder nichtseiende Fläche, d. i. Linie, oder nichtseiender Körper, d. i. Fläche; und so wird nun auch das Endliche im Sinne des Unendlichen genommen werden müssen. Es muß also in gewisser Hinsicht ein Gleiches sein zwischen dem Unendlichen und seinem Endlichen und dem zu diesem Endlichen gehörenden Nichtseienden. Daher wird sich einmal von solchem Gesichtspunkt aus die Gleichung setzen lassen $\infty = A = 0$. Dieses läßt sich beweisen:

Da $A - A = 0$, so ist auch $A = A + 0$, und $A - 0 = A$, daher auch $A + 0 = A - 0$; $(A + 0)^2 = (A - 0)^2$, oder
$A^2 + 2A.0 + 0^2 = A^2 - 2A.0 + A^2$; also $2A.0 = -2A.0$, oder
$A = -A.\frac{2.0}{2.0} = -A = -A + 0$, daher $2A = 0$, und $A = \frac{0}{2} = 0$.

Ebenso $\infty + A = \infty - A$, also $\infty^2 + 2A.\infty + A^2 = \infty^2 - 2A.\infty + A^2$, also $2A.\infty = -2A.\infty$, oder $\infty = -\infty = -\infty + 2A$, also $2\infty = 2A$, und $\infty = A$, und da auch $A = 0$, ist auch $\infty = 0$, also $\infty = A = 0$.

Hosted by Google

Nichts ein wirkliches Etwas. Differenzen verschiedener Nichts.

Da alle Größen gleich Nichts geachtet werden können nach dem Vorherigen, so mußte also das Nichts schon ein wirkliches Etwas bezeichnen, $\infty = -\infty$, $2\infty = 0$, $\infty = 0$; $A = -A$, $A = 0$. Da $A - A = 0$, aber A jede endliche Größe bedeuten kann, so muß auch $1-1 = 2-2 = 3-3 = 4-4 = 0$ sein. Es ist also auch $\infty = \frac{1}{0} = \frac{1}{1-1} = \frac{1}{2-2} = \frac{1}{3-3} = \frac{1}{4-4}$. Auch ist $\frac{2}{2-2} = \frac{1}{1-1}$; $\frac{3}{3-3} = \frac{1}{1-1}$; $\frac{4}{4-4} = \frac{1}{1-1} = \frac{1}{0}$. Mithin

$$\frac{1}{0} = \frac{1}{1-1} = \frac{1}{2-2} = \frac{1}{3-3} = \frac{1}{4-4} = \frac{2}{2-2} = \frac{3}{3-3} = \frac{4}{4-4} =$$
$$= \frac{2}{0} = \frac{3}{0} = \frac{4}{0}.$$

Wenn nun in der Gleichung $\frac{1}{0} = \frac{2}{0}$ der gemeinsame Divisor 0 weggelassen wird, oder die Gleichung mit 0 multiplizirt wird, so entsteht $1 = 2$, ebenso wird aus $\frac{1}{0} = \frac{3}{0}$ die neue Gleichung $1 = 3$, welches unmöglich, weil $1 < 2$ und $1 < 3$ ist. Solch ein Widerspruch kann aber nur dann gehoben werden, wenn die Nullen verschiedene Bedeutung haben, nachdem sie aus der einen oder der andern Größe entstanden sind. Ein Nichts entstanden aus $1-1$ bezeichnet etwas anderes, als ein Nichts entstanden aus $2-2$ oder aus $3-3$. So viele verschiedene Werthe von 0 muß es also geben können, als auch endliche Größen vorhanden sind, durch welche sie entstehen. Es muß sich mit den Nullen oder dem Nichts ebenso verhalten, wie mit den Schatten zu den endlichen Körpern bei dem unendlichen Lichte. Jeder endliche Körper hat einen Schatten, jeder Schatten ist ein Nichts, aber der Schatten des einen Körpers unterschieden von dem Schatten eines andern. So lange eine Rechnung endlicher Größen als solcher stattfindet, sind alle Differenzen ein und derselben Größen unter einander gleich, z. B. es ist durchaus $1 - 1 = 2 - 2$, weil $1 + 2 = 2 + 1$, $3 = 3$ ist. Ist aber eine Rechnung des Unendlichen, so kann nicht mehr $1 - 1 = 0$ auch gleich $2 - 2 = 0$ sein, oder die 0 Eins muß unterschieden werden von der 0 Zwei und so weiter. Ebenso ist ein endlicher Körper, zum Beispiel Stein, Holz, Haus, weniger demselben endlichen Körper vollkommen ein Nichts, Stein weniger Stein ist Nichts, Haus weniger Haus ist Nichts. Aber wenn ein unendliches Licht scheint, zum Beispiel das Sonnenlicht, so bleibt immer, wenn ich von dem Haus das Haus abziehe, mir hinwegdenke, der Schatten des Hauses,

Hosted by Google

das Nichts des Hauses; ebenso der Stein weniger dem Stein ist der Schatten des Steins, das Nichts des Steines.

Daß es nun aber richtig bleibt, daß eine positive Größe der negativen gleich sein muß, $A = -A$, will so viel heißen, daß das Sein der Dinge sich über jede Position und Negation erhebt; ein Ding, es mag gesetzt, gegeben, oder verweigert, weggenommen sein, bleibt sich selber gleich, ist ein und dasselbe, und insofern sind 5 Mark immer gleich 5 Mark, ich mag Vermögen oder Schulden meinen. Von etwas wird gesagt, daß es ist, mag es vorhanden oder abhanden sein, so bleibt es sich selber gleich. Wenn nun $A = -A$, $2A = 0$, $A = 0$, so würde dieses heißen, jeder endliche Körper ist seinem Nichts, d. h seinem Schatten gleich, indem für einen verschiedenen Gegenstand es ein verschiedenes Nichts, einen andern Schatten gibt. Also ist auf die Weise das Unendliche dem Endlichen, das Endliche dem Nichts (Schatten) gleich statt des Obigen, daß alle Größen gleich Nichts sind.

Ein wahres Sein kommt aber ebenso gut dem Unendlichen zu, wie dem Endlichen und dem Nichts (dem Nichtseienden). Denn wäre z. B. das Unendliche eine Täuschung, oder so viel als das Nichtseiende, so müßte, da $0 : A = A : \infty$, auch $A^2 = 0^2$, $A = 0$ sein, also alles Endliche ein Nichts, Nichtseiendes sein. Wäre das Endliche ein Wahn, ein Nichts, so müßte $0 : 0 = 0 : \infty$, also

$$\infty = \frac{0^2}{0} = 0$$

sein, also wäre alles ein Nichts. Wäre aber zuletzt nichts von dem Endlichen ausgegangen, oder wäre das Nichts, die Null nicht ein Nichtseiendes, sondern durchaus Nichts, so folgt, daß ein Körper auch durchaus Nichts wäre wegen seines Verhältnisses zum Unendlichen, wie das durchaus Nichts zum Endlichen, oder der Schatten wäre durchaus Nichts bei dem Körper. Es ist aber nach dem Verhältniß $0 : A = A : \infty$, weil 0 der Schatten zu A, auch A gleichsam der Schatten zu ∞, oder das Endliche ist das Schattensein des Unendlichen. Also muß sowohl dem Unendlichen als dem Endlichen, als dem Nichtseienden ein gewisses Sein zukommen.

Lehrsatz 1. Das Unendliche ist ein Nothwendigersein als das Endliche, und dieses ist nothwendiger wahrer als das Nichts.

Beweis. Es ist $\infty + A = \infty$, und nicht $\infty + A = A$, also hat hier das Unendlichsein ein Mehrsein, als das Endliche, weil dieses ein Nichtsein wird, und bloß das Unendliche das Sein ist. Ebenso ist $A + 0 = A$, und nicht $A + 0 = 0$; also ist das wahre Sein das Endliche, und Nichtsein ist 0, das Nichts.

Das Nichtsein ist das Sein der Dinge, unterschieden von dem Satze: die Dinge sind nicht, welches der Idealismus behauptet. Ein wahres Sein der Dinge ist ein Nichtsein.

Hosted by Google

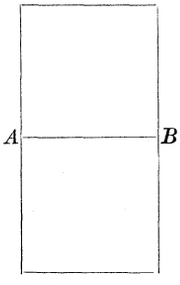
Lehrsatz 2. Das Endliche ist ein negatives Sein bei dem Unendlichen, und ein positives Sein bei dem Nichts, der Null, also ihrem wahren Werthe nach betrachtet, d. h. die Dinge nach ihrem Ursprunge angesehen, sind sie an und für sich ein Nichtsein, ein negatives Sein.

Beweis. In der Verbindung $\infty + A$ bedeutet dieses A nichts weiter, und $\infty + A$ ist vollkommen gleich ∞, das endliche A ist ein Nichtsein, Schattensein, so wie in der Verbindung $A + 0$ diese 0 der Schatten zu dem endlichen A ist, aber A selbst ein wahres also positives Sein bezeichnet. Es ist aber auch von Natur der Schatten das „nicht Licht sein", eine Negation, welches durch den Körper des Endlichen verursacht wurde, und erst wenn man von dem Ursprunge abläßt, danach nicht fragt, so entsteht der eigene Begriff Schatten, statt das „nicht mehr Licht sein".

Von dem positiven und negativen Sein der Dinge ist wohl zu unterscheiden das Sein der positiven und der negativen Dinge oder Größen. Hiervon sind folgende Sätze zu merken:

I. Jede endliche Größe sowohl als das Unendliche und das Nichts, die Null, kann zugleich positiv und negativ dargestellt werden.

Fig. 2.



Beweis. Beim Endlichen ist $\sqrt{2} = \pm 2$, $x = \pm\sqrt{a}$, also zugleich positiv und negativ. Ebenso im Raume die Linie A B ist positiv gedacht, wenn man darüber ein Quadrat construirt, und zugleich negativ, wenn man das Quadrat darunter macht. (S. Fig. 2.) Beim Unendlichen hat man in der Trigonometrie $\tan 90^0 = +\infty$, weil die Tangenten im ersten Quadranten positiv sind, und wachsen von 0 zu ∞, zugleich aber ist auch $\tan 90^0 = -\infty$, weil 90^0 ebenso wie eine fortgesetzte Größe von 0 aus des ersten Quadranten auch betrachtet werden kann als Differenz von $180^0 — 90^0$. Nun sind im zweiten Quadranten die Tangenten negativ, und der Reihe nach im Abnehmen begriffen von $-\infty$ zu -0; also $\tan g\, 90^0$ auch $-\infty$. Ebenso im dritten Quadranten, wo die Tangenten wieder positiv werden, nehmen die Tangenten zu von $+0$ zu $+\infty$, daß $\tan 270^0 = +\infty$ ist; im vierten Quadranten nehmen die Tangen ab, und sind negativ von $-\infty$ zu -0, also ist auch $\tan 270^0 = -\infty$. Mithin $\tan 90^0 = \pm\infty$, $\tan 270^0 = \pm\infty$. Drittens für das Nichts ist $\tan 0^0 = +0$, $\tan 180^0 = -0$, und $\tan 180^0 = +0$, $\tan 360^0 = -0$, also $\tan 180^0 = \pm 0$.

II. Zu jeder positiven Größe gehört eine negative, welche dieser gleich ist, sowohl bei dem Unendlichen, als Endlichen und dem Nichts.

$$\tan 90^0 = \pm\infty;\ \sqrt{A^2} = \pm A;\ \tan 180^0 = \mp 0.$$

Hosted by Google

Werdendes Unendliches kann man eine positive und werdendes Nichts eine negative Größe nennen, hingegen das War Unendliche eine negative, und das War Nichts eine positive Größe.

$$\tan 90^0 = \pm\infty;\ \tan 180^0 = \mp 0.$$

III. Wie das Nichtssein (Schattensein) ein nicht Unendlichsein (Nicht-Lichtsein) verhindert durch ein dazwischen getretenes (negatives) Endlichsein ein negatives Sein ist, so auch umgekehrt das Unendlichsein (das Licht) ein Nichtsein des Nichtssein (des positiven), hervorgebracht durch ein vermittelndes (positives) Endlichsein ein positives Sein.

IV. Ein positives Endlichsein hat von dem Nichts, ein negatives Endlichsein von dem Unendlichen seinen Ursprung.

V. Ein Unendliches und ein Nichts sind geradezu widersprechend (Licht nicht, wo Schatten), das Endliche ist weder im Widerspruch mit dem Unendlichen, noch mit dem Nichts.

$$\tan 90^0 = \pm\infty,\ \tan 180^0 = \mp 0.$$

Das Endliche macht keine Aenderung im Sein, negirt weder ein früher gewesenes positives Nichtssein, $\tan 45^0 = +1$, wie $\tan 0^0 = +0$, noch bejaht es ein früher gewesenes negirendes Unendlichsein, $\tan 135^0 = -1$, wie $\tan 90^0 = -\infty$. Das Endliche ist ein zwei Widersprüche zugleich gelten lassendes Sein, oder auch ein aus jenen beiden zusammengesetztes, da $1 = 0.\infty$.

Das Sein im weitesten Verstande ist sowohl ein Unendliches, als Endliches und Nichts, aber in der eigentlichsten Bedeutung ist bloß das Unendliche, Göttliche ein Sein, das Nichts ein Nichtsein, das Endliche weder ein Sein noch ein Nichtsein, ist weder noch ist es nicht.

$$\infty - \infty = 1;\ 1 - 1 = 0;\ \frac{0}{0} = 1;\ \frac{1}{0} = \infty.$$

Zusatz. Das Sein der positiven und der negativen Dinge, das $\pm$ des Seins ist jeder endliche Körper mit seinem Schatten. Denn wie über jede Linie sich ein positives und ein negatives Quadrat construiren läßt, so ist auch über jede Fläche ein positiver Körper und ein negativer denkbar. Daher gehört zu jedem Körper bei einer gegebenen Fläche ein ebenso großer mit entgegengesetztem Vorzeichen. Da nun die Dinge vom Unendlichen aus betrachtet (dem Lichte) ein Nichtsein sind, ein negatives Sein, und vom Nichts aus (dem Schatten) ein positives, so muß ein endlicher Körper mit seinem Schatten gestellt ein positives, und der Schatten zu dem Körper ein negatives ausmachen. Also jeder Körper mit seinem Schatten ist $\pm A$. Unterschieden von diesem Sein der positiven und der negativen Dinge ist ein wirkliches negatives Sein der Dinge bei dem Bilde im Spiegel oder im Wasser, das ein Minus-Sein bezeichnet sowohl des Unend-

Hosted by Google

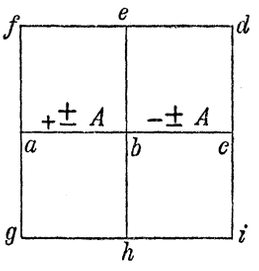
lichen, positiv Seienden, als auch Endlichen positiv Seienden, und des Nichts (Schatten), positiv Seienden.

Zusatz 2. Der Schatten und das Bild im Spiegel oder Wasser können daher so von einander unterschieden werden, daß der Schatten ein Sein $-A$, das Bild ein — Sein A zu nennen ist. Endlicher Körper mit seinem Schatten ist $\pm A$, das Bild des Körpers mit des Schattens Bild ist — Sein $\pm A$.

Erklärung. Es ist zu unterscheiden die $\pm A$ Größe von der Größe $+A$ und der $-A$. Eine Größe $\pm A$ ist eine Größe, die zugleich positiv und negativ sein kann, wie eine Linie ab. Eine Größe $+A$ und eine $-A$ sind zwei Größen, die einander zwar gleich sind, aber entgegengesetzte Lage, entgegengesetzte Vorzeichen habe, so $ab = bc = A$. Die Linie ab ist $\pm$, denn ich kann ein Quadrat $abef$ darüber construiren, positiv, und ein Quadrat $abhg$, welches der negativen Seite zukommt. (S. Fig. 3.)

Es ist also $abhg = (-A)^2$; $abef = (+A)^2$. Zweitens ist in negativer Lage jenseits der Linie eh das Quadrat $bcde = (+A)^2$, und $bcih = (-A)^2$. Also jede Linie läßt sich vierfach betrachten, erstens in positiver Lage diesseits einer andern bestimmenden Linie eh, die Linie ab sowohl positiv als negativ; zweitens in negativer Lage jenseits eh als positiv und negativ. Wäre $ab = 4$, so ist $abef = (+4)^2 = +16$, und $bcde = +16$, doch ersteres in positiver, letzteres in negativer Lage; und $abhg = (-4)^2 = +16$ in positiver, aber $bcih = (-4)^2$ in negativer Lage.

Fig. 3.



VI. Alle sogenannten imaginären Größen, die man auch unmögliche nannte, sind mögliche Größen.

Beweis. Es ist in positiver Lage diesseits der Linie eh das $(+ab)^2 = abef$ und $(-ab)^2 = abhg$ oder $(+4)^2 = +16$ und $(-4)^2 = +16$, dann in negativer $(+bc)^2 = bcde$ und $(-bc)^2 = bcih$, oder $(+4)^2 = 16$ und $(-4)^2 = 16$. Jedes der 4 Quadrate ist 16, aber die zwei ersten diesseits eh sind positiv, nemlich $abef$ und $abhg$, also jedes $+16$, und die zwei letztern $bcde$ und $bcih$ sind jenseits der bestimmenden eh negativ, also jedes -16. Die Quadratwurzel von $bcih$ ist $-bc$, und von $bcde$ ist $+bc$, oder ersteres -4, letzteres $+4$. Mithin auch $\sqrt{-16} = \mp 4$; $\sqrt{bc^2} = \sqrt{-(ab)^2}$; $\sqrt{bc} = \sqrt{-ab}$. Oder $\square abef = (+4)^2 = +16 = \square abhg = (-4)^2 = +16$, aber $\square bcde = \square bcih = -16$; $\sqrt{+16} = +\pm 4$; $\sqrt{-16} = -\pm 4$.

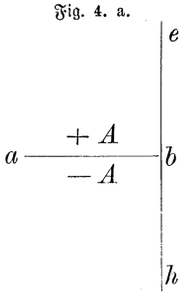
Zusatz 1. Es ist $\sqrt{-A} = -\sqrt{A}$, und $-\sqrt{-A} = \sqrt{A}$.

Hosted by Google

Beweis. Jede Wurzel kann zwei Werthe haben. Nach Obigem ist aber $\sqrt{16} = + \pm 4 = \pm 4$; $\sqrt{-16} = - \pm 4 = \mp$. Also $\sqrt{16} = -\sqrt{-16}$, oder $\sqrt{-16} = -\sqrt{16}$.

Zusatz 2. Wird durch die Linie ab das Positive und das Negative bestimmt, daß Positives sei, was oberhalb ab, Negatives was unterhalb, so würde □abef und □bcde positiv aber □abhg und □bcih negativ werden.

Fig. 4. a.

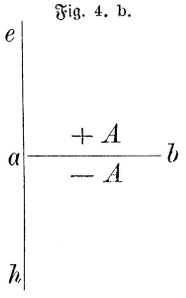


Zusatz 3. Die Linie ab wird ein Positives und ein Negatives ausmachen, wenn eh an den Punkt b sowohl gelegt wird, als an den Punkt a. (S. Fig. 4, a u. b).

Für das Weitere verweise ich auf meine Schrift „Die imaginären Größen". Stuttgart 1881.

Zusatz 4. Eine Größe $\pm$A ist eine positive und eine $\mp$A eine negative zu nennen. Das Unendliche $\pm \infty =$ $= \tan 90^0 = \tan 270^0$ positiv, das Nichts $\tan 180^0 =$ $= \tan 360^0 = \mp 0$ negativ, ersteres Sein, letzteres Nichtsein. Ebenso ist $\sqrt{A}$ positiv $\sqrt{-A}$ negativ. Alle Wurzelgrößen positiver Ausdrücke sind auch selbst positive Größen, und negative Größen nur solche, deren Quadrate selbst negativ bleiben.

Fig. 4. b.



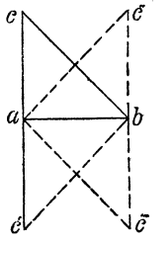
VII. Der Anfang alles Negativen im Sein ist negative Reproduktion des Gewesenen.

Beweis ist das Bild in der Fläche bei dem Wasser und den glatten Spiegelkörpern.

VIII. Wie die Linie a ——— b, so überhaupt kann jede Größe für sich auf vierfache Weise betrachtet werdn. Daher muß auch für jeden Körper A ein vierfaches Sein geben.

Ist also einmal ein Ding A, so müssen dazu drei andere Nichtsein desselben hinzukommen. (S. Fig. 5.)

Fig. 5.



Beweis. Wenn man über die Linie ab ein gleichschenkeliges rechtwinkeliges Dreieck abc construiren will, so lassen sich deren vier errichten. Ebenso läßt sich über jedes Dreieck ein Körper, z. B. ein reguläres Prisma errichten. Ist also einmal ein solcher Körper, so bleiben noch drei solcher der Möglichkeit übrig. Diese sind aber zu dem Körper, Schatten Bild und Bildes Schatten. Daher ist jede Größe $\pm$ erstens positiv ein Körper A mit seinem Schatten, aber $\pm$ negativ dessen Bild mit dem Schatten.

Lehrsatz 3. Es ist $1^\infty = a$, gleich jeder beliebigen endlichen Größe.

Hosted by Google

Beweis. Es ist $a^0 = 1$ und $a^{0\cdot\infty} = a' = a$, auch ist:
$a^{0\cdot\infty} = (a^0)^\infty = 1^\infty$, folglich $1^\infty = a$.

Zweiter Beweis. Es ist $a^0 = 1 = 1'$, mithin auch $\sqrt[0]{a^0} = \sqrt[0]{1'}$, oder $a^{0/0} = 1^{1/0}$, das heißt $a = 1^\infty$. Die Einheit also zur unendlichen Potenz erhoben kann gleich 2, gleich 3, oder jeder beliebigen endlichen Größe gleich sein.

Zusatz 1. Die unendliche Wurzel aus jeder beliebigen endlichen Größe ist gleich der Einheit, und die nullte Wurzel aus derselben gleich der Grundgröße zur unendlichen Potenz erhoben.

$\sqrt[\infty]{a} = 1$, $\sqrt[0]{a} = a^\infty$. Denn $\sqrt[\infty]{a} = \sqrt[\infty]{a'} = a^{1/\infty} = a^0 = 1$, und zweitens $\sqrt[0]{a} = \sqrt[0]{a'} = a^{1/0} = a^\infty$.

Zusatz 2. Wenn hier a als Einheit betrachtet wird, so ist, weil $1^\infty = b$, auch $a^\infty = b$, folglich auch immer $\sqrt[0]{a} = b$.

Zusatz 3. Es ist $\sqrt[0-0]{a} = \sqrt[0]{a^\infty}$; denn es ist $\sqrt[0]{a^\infty} = \sqrt[0]{a^{1/0}}$, oder

$$\sqrt[0]{a^\infty} = \sqrt[2]{a} = \sqrt[0.0]{a} = \sqrt[0(1-1)]{a} = \sqrt[0.1-0.1]{a} = \sqrt[0-0]{a}.$$

Lehrsatz 4. Wenn 0 mit verschiedenen endlichen Größen multiplizirt wird, so sind die erhaltenen Werthe unter sich ungleich, und zweitens kann keiner gleich einer endlichen Größe selbst sein.

Beweis. Es sei 0 zu multipliziren mit 1, dann 0 mit 2, und 0 mit 3, so kann erstens nicht $0.1 = 0.2$, sondern es kann nur 0.1, aber weder 0.2, noch 0.3 und so weiter gleich 0 selbst werden. Wäre $0.1 = 0.2$, so auch $\frac{0}{0}.1 = 2$, oder $1.1 = 2$, also $1 = 2$, welches unmöglich. Aber es ist $0.1 = 0$, weil $1 = \frac{0}{0} = 1$. Wäre $0.2 = 0$, so auch $2 = \frac{0}{0} = 1$, was ebenfalls unmöglich. Wäre aber 0.2 oder 0.3 eine bestimmte kleine endliche Größe, also etwa a, b, so wäre, da $0.2 = a$, und $0.3 = b$, auch $2 = \frac{a}{0}$ und $3 = \frac{b}{0}$, oder $2 = \infty$, und $3 = \infty$, oder $0 = \frac{a}{2}$, $0 = \frac{b}{3}$, welches ebenfalls unmöglich.

Deßwegen kann sowohl das Produkt 0.2 als 0.3 nur ein Nichts, 0, ausmachen, das sich jedoch nach verschiedenen Multiplikationen in seinem Werthe

Hosted by Google

verschiedentlich unterscheidet; oder die Produkte einer Null mit verschiedenen endlichen Größen geben verschiedene Differenzen des Nichts.

Lehrsatz 5. Wie es daher differenzirende Endlichkeiten und Nullitäten gibt, so muß es auch an sich verschiedene Unendlichkeiten geben. Jedoch gibt es, oder kann es geben für jedes Unendliches Ein Endliches und Ein Nichts, welche jenem in einer Weise gleich kommen.

Beweis. Wenn in der Proportion $0 : A = A : \infty$ der Werth der Null variirt, und einmal die eine, ein andermal die andere verschieden erwiesene Größe bezeichnet, so muß, wenn A immer dasselbe bedeutet, auch das Unendliche in in seinem Werthe variiren, oder wenn $0 : A = A : \infty$, so muß $0' : A = A : \infty'$, und nicht $0' : A = A : \infty$, denn wenn dieß, so ist $\frac{A}{0} = \frac{A}{0'}$, also $0' = 0$, und es gäbe dann auch keine Differenz unter zwei verschiedenen Nullen.

Daß $\infty = A = 0$ werden kann, haben wir früher gesehen.

Wenn das eine, entweder das Endliche oder das Unendliche oder das Nichts an Werth variiren soll, so muß auch noch ein anderes variiren, während das dritte seinen ersten Werth behält. Also $A^2 = 0 . \infty = 0' . \infty'$; $0 = \frac{A^2}{\infty} = \frac{A'^2}{\infty'}$; $\infty = \frac{A^2}{0} = \frac{A'^2}{0'}$. Denn wäre $A^2 = 0' . \infty$, so müßte $0 = 0'$, oder wäre $A^2 = 0 . \infty'$, so müßte $\infty = \infty'$, wäre $0 = \frac{A'^2}{\infty}$, so müßte $\frac{A^2}{\infty} = \frac{A^2}{\infty'}$, also $\infty' = \infty$, und wäre $\infty = \frac{A'^2}{0}$, so müßte $\frac{A^2}{0} = \frac{A'^2}{0}$ also $A = A'$; zuletzt wäre $\infty = \frac{A^2}{0'}$, so wäre $\frac{A^2}{0} = \frac{A^2}{0'}$, also $0 = 0'$.

Die erste Formel $A^2 = 0 . \infty = 0' . \infty'$ heißt entweder: wenn bei demselben Endlichen sich das Unendliche verändert, so auch das Nichts; oder umgekehrt wenn das Nichts so das Unendliche. So z. B. beim Licht, Körper (als Baum), Schatten. Wenn bei demselben Baume sich das Licht verändert, so auch der Schatten, und umgekehrt, wenn der Schatten, so das Licht. Aus der zweiten Formel $0 = \frac{A^2}{\infty} = \frac{A'^2}{\infty'}$ folgt, daß wenn bei demselben Nichts sich das Endliche verändert, so auch das Unendliche, und wenn das Unendliche, so auch das Endliche. Also kommt demselben Schatten bei verändertem Lichte ein anderer Körper und bei verändertem Körper ein verändertes Licht zu. Endlich sagt die dritte Formel $\infty = \frac{A^2}{0} = \frac{A'^2}{0'}$, daß, wenn bei demselben Unendlichen sich das Endliche verändert, so auch das Nichts, und wenn das Nichts, so das Endliche.

Hosted by Google

Mithin haben bei demselben unendlichen Lichte verschiedene Körper als z. B. beim Sonnenlichte zu derselben Zeit verschiedene Bäume unterschiedliche Schatten, und umgekehrt verschiedene Schatten erfordern einen unterschiedlichen körperlichen Gegenstand.

Lehrsatz 6. Sowohl das Unendliche, als auch das Endliche, als das Nichts durch sich selber dividirt oder auch durch ein ihm Gleiches gibt die endliche Einheit.

Beweis. Es ist $\frac{1}{1} = 1$; $\frac{2}{2} = 1$; $\frac{4}{6-2} = 1$; $\frac{a}{a} = 1$. Zweitens hatte man nach Lehrsatz VII die Proportion $y - x : xy = \cos 2\,m^0 : \cot 2\,m^0$. Wenn nun hier $m^0 = 45^0$ ist, so war bewiesen, daß dann $y - x = xy$ ist, also auch $\frac{y-x}{xy} = \frac{\cos 2\,m^0}{\cot.2\,m^0} = \frac{\cos 90^0}{\cot.90^0}$, das ist $1 = \frac{0}{0}$. Dieses 1 aber, weil es durch Division eines Endlichen durch ein Endliches entstanden, aus $\frac{y-x}{xy}$, bezeichnet auch selbst wieder ein Endliches, ein endliches Eins. Drittens war nach demselben Lehrsatz VII die Proportion $y-x : xy = \tan 2\,m^0 : \sec 2\,m^0$, weil $\cos 2\,m^0 : \cot 2\,m^0 = \tan 2\,m^0 : \sec 2\,m^0$ ist, daher ist auch wieder wenn $m^0 = 45^0$ ist, $\frac{y-x}{xy} = 1 = \frac{\tan 90^0}{\sec 90^0} = \frac{\infty}{\infty}$. Also auch, wenn ein Unendliches durch sich selber dividirt wird, so entsteht ein Einheitliches, welches ein Endliches ist.

Zusatz 1. Das Endliche dividirt durch sein Quadrat gibt ein Endliches, das Nichts durch sein Quadrat aber ein Unendliches, und das Unendliche durch sein Quadrat gibt das Nichts.

Beweis. Es ist $\frac{a}{a^2} = \frac{1}{a}$, $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$; $\frac{0{,}4}{0{,}16} = \frac{40}{16} = 2\,1/2 = 2{,}5$; ferner $\frac{0}{0^2} = \frac{0}{0.0} = \frac{1}{0} = \infty$, und $\frac{\infty}{\infty^2} = \frac{1}{\infty} = 0$.

Zusatz 2. Die unendliche Tangente dividirt durch sich selber gibt die Einheitstangente gleich dem Halbmesser des Kreises.

Lehrsatz 7. Unendliches mit verschiedenen endlichen Größen multiplizirt gibt unter sich verschiedene Unendlichkeiten.

Beweis. Wenn in der Proportion $\tan 2\,m^0 . \tan m^0 : \tan 2\,m^0 - \tan m^0 = y - x : xy$ die $\tan m^0 = \tan 45^0$, so entsteht $\infty . 1 = \infty - 1$, oder auch $1 = 1 - \frac{1}{\infty}$, und wie bewiesen $\infty = \infty . 1$. Wäre nun $\infty . 1 = \infty . 2$, so auch $\frac{\infty}{\infty} . 1 = 2$, oder $1 . 1 = 2$, welches unmöglich; ebenso wenn $\infty . 1 = \infty . 3$, so

Hosted by Google

$\frac{\infty}{\infty}.1=3$, oder $1=3$, was ebenfalls unmöglich. Wäre $\infty.2$ gleich einer endlichen Größe, also etwa a, und $\infty.3=b$, so auch $\frac{a}{2}=\infty$, und $\infty=\frac{b}{3}$. Dieses ist aber aus dem Grunde unmöglich, weil ein Endliches dividirt durch ein Endliches nur ein Endliches geben kann. Endlich kann $\infty.2$, $\infty.a$ kein Nichts ausmachen. Denn alsdann wäre auch $\infty.1.2=0.1$, mithin $\frac{\infty.1}{0}=\frac{1}{2}$; $\infty^2=\frac{1}{2}$, und $\infty=\frac{1}{2}\sqrt{2}$, welches unmöglich. Oder wenn $\infty.a=0$, so $\infty.1.a=0.1.\frac{\infty.1}{0}=\frac{1}{a}$; $\infty^2=\frac{1}{a}$ und $\infty=\sqrt{\frac{1}{a}}$, also ein Endliches. Folglich müssen die Produkte aus dem Unendlichen mit verschiedenen endlichen Größen unter sich verschiedene Unendlichkeiten ausmachen.

Lehrsatz 8. Wenn verschiedene Unendlichkeiten von einander subtrahirt werden, so entsteht ein anderes Unendliches, werden verschiedene Nullen von einander abgezogen, so entsteht ein anderes verschiedenes Nichts.

$$\infty-\infty'=\infty''\,;\ \infty'-\infty=\infty'''\,;\ 0-0'=0''\,;\ 0'-0=0'''.$$

Beweis. Es ist $\infty-\infty=\frac{1}{0}-\frac{1}{0'}=\frac{0'-0}{0.0'}=\frac{(a-1)0}{0.0'}=$

$=\frac{a-1}{0'}=b.\infty'=\infty''$.

Dann $\infty'-\infty=\frac{1}{0'}-\frac{1}{0}=\frac{0-0'}{0'.0}=\frac{0(1-a)}{0'.0}=\frac{c}{0'}=c.\infty'=\infty'''$.

Ebenso wenn $\infty=\frac{a}{0}$, aber $\infty'=\frac{b}{0}$, so entsteht:

$\infty-\infty'=\frac{a}{0}-\frac{b}{0}=\frac{a-b}{0}=\frac{c}{0}=\infty^{IV}$, und $\infty'-\infty=\frac{b-a}{0}=\frac{d}{0}=\infty^{V}$.

Ferner ist $0-0'=0-a.0=0(1-a)=0.b=0''$, und

$0'-0=a.0-0=0(a-1)=0.c=0'''$.

Lehrsatz 9. Werden verschiedene Unendlichkeiten in einander dividirt, oder auch verschiedene Nichts, so entstehen von der Einheit verschiedene Endlichkeiten.

$$\frac{\infty}{\infty'}=A,\ \frac{\infty'}{\infty}=B;\ \frac{0}{0'}=B;\ \frac{0'}{0}=A.$$

Beweis. Es ist $\frac{\infty}{\infty'}=\infty.0'=A$; $\frac{\infty'}{\infty}=\infty'.0=B$;

$\frac{0}{0'}=0.\infty'=B$, $\frac{0'}{0}=0'.\infty=A$.

Hosted by Google

Zuſatz. Es iſt $0 . \infty = 0' . \infty' = 0'' . \infty''$.

Beweis. Da $\frac{\infty}{\infty'} = A = \frac{0'}{0}$, ſo iſt auch $\infty . 0 = \infty' . 0'$, und da

$\frac{\infty'}{\infty''} = \frac{\frac{1}{0'}}{\frac{1}{0''}} = \frac{1}{0' . \frac{1}{0''}} = \frac{0''}{0'}$, ſo auch $\infty' . 0' = \infty'' . 0''$. Mithin

$\infty . 0 = \infty' . 0' = \infty'' . 0''$.

Wie $1 > 0$; $1 = 0$; $1 < 0$, ebenfalls wie $1 < \infty$; $1 = \infty$; $1 > \infty$ ſein kann.

Es iſt $1 > 0$, denn jedes Ganze iſt größer als ſein Theil, mithin auch $1 > 1/4$, $1 > 1/8$, und 1 größer als jeder beliebige Theil der Einheit, folglich auch $1 > 0$, denn 0 iſt unter allen Theilen der Einheit ſein kleinſter, nemlich der unendliche, $\frac{1}{\infty} = 0$, und ein unendlicher Theil iſt kleiner als jeder endliche. Zweitens kann aber auch $1 = 0$ ſein, wie wir oben geſehen haben. Oder wenn $A = -A$, weil $A(1 - 1) = -A(1 - 1)$, ſo folgte daraus, daß $2A = 0$, und wenn $2A = B$, daß $B = 0$, oder $1 = 0$. Jedes Endliche wurde gleich dem Nichts erwieſen. Wie nun dieſer Widerſpruch zu heben mit dem Vorhergehenden 1 ſtets größer als 0? Der Widerſpruch iſt nur ein ſcheinbarer. Denn wenn erwieſen wird, daß $1 > 0$ und wiederum $1 = 0$, ſo heißt dieſes, weil 0 der unendliche Theil der Einheit iſt, daß die Einheit, das Ganze einmal größer als ſein unendlicher Theil, und ein andermal gleich demſelben iſt. Dieſes kann aber aus verſchiedenen Geſichtspunkten betrachtet recht gut möglich ſein. Denn ein unendlicher Theil heißt einmal der kleinſte Theil des ſeienden Ganzen, alſo iſt er auch ſelber ſeiend, und in demſelben Sein iſt jeder Theil kleiner als ſein Ganzes, alſo $1 > 0$; oder auch ein unendlicher Theil heißt, weil $\frac{1}{\infty} = 0$, ein Nichtſeiendes, und zwar das Ganze, deſſen Theil er iſt, nicht ſeiend; folglich muß auch ein unendlicher Theil, da er daſſelbe, was das Ganze, nur nichtſeiend bezeichnet, gleich ſein dem Ganzen, wenn man nemlich hierbei vom Sein abſieht, und nur auf das Rückſicht nimmt, was ſeiend oder nichtſeiend bezeichnet wird. Man muß alſo allemal bei den Gleichungen oder Größenbeſtimmungen auf den verſchiedenen Geſichtspunkt ſehen, wovon man ausgeht. Nach ein und demſelben Geſichtspunkt bleibt es ein Widerſpruch, daß $1 > 0$, und $1 = 0$. Denn wenn in demſelben Sein die Einheit größer als ſein Theil, ſo kann nicht einmal auch dieſelbe gleich ſeinem Theil ſein. Ein Beiſpiel anderer Art, wo

Hosted by Google

auch nicht einmal vom Unendlichen die Rede ist, mag dieses hinlänglich bestätigen. Es ist 1 ℔ Gold = 1 ℔ Silber, weil 1 ℔ immer 1 ℔ bleibt, also wo man vom Gesichtspunkte des Gewichtes ausgeht. Ebenso aber auch hat man einen andern Gesichtspunkt, ist von keinem Gewichte weiter die Rede, sondern sieht man nur auf das Volumen, so kann es, da es die Gleichung gab, 1 ℔ Gold = 1 ℔ Silber, auch mit dieser widersprechend gesagt werden, 1 ℔ Silber > 1 ℔ Gold, denn für 1 ℔ nimmt das Silber einen größern Raum ein als das Gold. Wie ich also einmal sage 1 ℔ Gold = 1 ℔ Silber, und bei einer andern Gelegenheit 1 ℔ Silber > 1 ℔ Gold, und dennoch keinen Unsinn reden werde; so begehe ich auch keinen Widerspruch, wenn ich einmal sage $1 > 0$, und bei einem andern Falle $1 = 0$. Das erstere $1 > 0$ ist in demselben Sein, demselben Raume, ein Körper größer als sein Schatten, denn in demselben Raume nimmt der Körper immer irgend welchen Platz ein, aber der Schatten, das Nichtseiende nimmt nur den unendlich kleinen, das heißt keinen ausfüllenden Platz im Raume ein; das andere $1 = 0$ ist ein Körper im wirklichen Raume, der ebenso vielen Platz ausfüllt, als in dem Nicht- oder Scheinraume sein zurückstrahlendes Bild. Jeder Körper ist gleich seinem Bilde. Oder es kann auch $1 = 0$ von dem Körper und dem Schatten gesagt werden, wenn man nicht wie vorhin von dem Gesichtspunkte des Raumausfüllens ausgeht, sondern davon, daß in demselben wirklichen Raume der Körper ein seiendes Ganzes, der Schatten aber dasselbe Ganze nichtseiend bezeichnet.

Drittens kann $1 < 0$ sein. Es wurde bewiesen, daß es für jedes Endliche ein Nichtseiendes, ein Nichts, eine Null gäbe, welche an Werth gleich dem Endlichen, da sie das Endliche nicht seiend bezeichnet; ferner daß es verschiedene Differenzen der Nullen, der Nichts, gäbe, nicht alle Nullen unter sich gleich wären, also eine größer oder kleiner sein kann, als eine andere. Eine Null wird größer sein als eine andere, $0 > 0'$, wenn das Endliche, dessen Ganzes nichtseiend 0 bezeichnet, auch größer ist, als das Endliche, dessen Ganzes nichtseiend $0'$ bezeichnet; und eine Null wird kleiner sein, als eine andere, $0 < 0'$, wenn das Endliche, dessen Ganzes nichtseiend 0 bezeichnet, auch kleiner ist als das Endliche, dessen Ganzes nichtseiend $0'$ bezeichnet. Ist also $A > B$, und $A = 0$, $B = 0'$, so auch $0 > 0'$; wenn aber ist $A < B$, und $A = 0$, $B = 0'$, so auch $0 < 0'$. Mithin wird auch im erstern Falle, wo $A > B$, dieses $B < 0$, und im zweiten, wo $A < B$, jenes $A < 0'$ sein müssen. Folglich auch, wenn $B = 1$, so $1 < 0$, oder wenn $A = 1$, so $1 < 0'$. Es kann also nach verschiedenen Gesichtspunkten ein und dasselbe sowohl größer als kleiner als auch gleich sein einem andern. In dem vorher erwähnten Beispiele, wo 1 ℔ Gold = 1 ℔ Silber vom Gesichtspunkt des Gewichtes betrachtet, und vom Gesichtspunkt des Volumens aus 1 ℔ Silber < 1 ℔ Gold wird, wenn man den Gesichtspunkt der

Hosted by Google

Dichtigkeit nimmt, 1 ℔ Gold $>$ 1 ℔ Silber, oder 1 ℔ Silber $<$ 1 ℔ Gold, d. h. dasjenige, was bei gleichem Volumen größeres Gewicht, und bei gleichem Gewichte kleineres Volumen hat, hat das größere spezifische Gewicht. — Es ist ein Körper kleiner als ein Bild, $1 < 0$, wenn das Bild nicht diesen Körper, sondern einen andern größeren wiedergibt. So wenn ein Kind in einem Zimmer sich befindet, und in einem Spiegel das Bild einer größeren Person im Zimmer gewahr wird, so ist dieses Bild, selbst ein Nichts größer als das Kind, weil das Bild gleich der größern Person, und diese größer als das Kind ist. Ebenfalls wenn von einem gewissen Gesichtspunkte aus gesagt werden konnte, der Mensch sei gleich seinem Schatten, so wird auch der Schatten eines größern Menschen, weil größer als der Schatten des kleineren, selber größer sein als der kleinere Mensch, $1 < 0$. Aber es kann auch von dem Menschen und seinem eigenen Schatten, dem Seienden und dem Nichtseienden nach dem Gesichtspunkte des Größenmaßes gesagt werden, da die Schatten bald wachsen, bald abnehmen, daß der Mensch größer, daß gleich daß er kleiner sei, als sein Schatten, $1 > 0$, $1 = 0$; $1 < 0$.

Was den zweiten Fall betrifft, wonach $1 < \infty$, $1 = \infty$, $1 > \infty$ sein kann, so gründet er sich auf dieselben Beweisgründe, nach welchen $1 > 0$, $1 = 0$, $1 < 0$ sein kann. Denn das Endliche verhält sich ebenso zum Unendlichen, wie das Nichts zum Endlichen, ist ebenso die Differenz des Unendlichen von sich selber, wie das Nichts des Endlichen, ebenso der unendliche kleinste Theil des Unendlichen, wie das Nichts des Endlichen. Es muß daher auch erstens $1 < \infty$ sein, weil 1 der kleinste, unendliche Theil des Unendlichen ausmacht, und jeder Theil kleiner ist als sein Ganzes. Zweitens kann $1 = \infty$ sein. Denn es ist

$\infty = \frac{1}{0} = \frac{1}{1-1}$, also auch $\infty(1-1) = 1$; $-\infty.-(1-1) = 1$,

$-\infty(1-1) = 1$; $-\infty = \frac{1}{0} = \infty$; $0 - 0 = 2\infty = 0(1-1) = 0^2$.

Da nun nach Obigem $0 = A$ sein kann, so auch $2\infty = A^2$, mithin

$\infty = \frac{A^2}{2} = B = 1$. Oder nach Lehrsatz VI war $\cos 2\,m^0 =$

$\frac{\sqrt{x^2y^2 - (y-x)^2}}{xy}$, also wenn $m^0 = 45^0$ wird $0 = \frac{\sqrt{0}}{xy}$, oder

$0 . xy = \sqrt{0'}$, $0^2 . x^2y^2 = 0'$; $x^2y^2 = \frac{0'}{0^2} = \frac{0'.1}{0.0} = A . \infty = \infty'$, also wenn $x^2 . y^2 = 1$, so ist $1 = \infty'$. Wenn also das Endliche gleich dem Unendlichen sein kann, $1 = \infty$, so wird nicht, wie früher, dieses endliche Eins als ein Theil desselben seienden Ganzen genommen, sondern das Endliche bezeichnet das unendliche Ganze nichtseiend, sowie, wenn $1 = 0$, dieses 0 das endliche

Hosted by Google

Ganze nicht seiend bezeichnet. — Drittens kann $1 > \infty$ sein. Da es verschiedene Unendlichkeiten geben kann, wie auch verschiedene Nichts, und man also z. B. hat $0 : A = A : \infty$, und $0' : A = A : \infty'$, so wird wenn $0 > 0'$, auch $\infty < \infty'$, und wenn $0 < 0'$, so $\infty > \infty'$ sein müssen. Ist nun nach dem Vorigen $\infty = B$, und $\infty' < \infty$, so muß $\infty' < B$ sein, oder wenn $\infty' = C$, aber $\infty' > \infty$, so $\infty < C$, das heißt auch, wenn $C = 1$, daß $\infty < 1$, oder $1 > \infty$ ist.

a) Ein Ding, ob es ist oder nicht ist, bleibt sich selber gleich, ist dasselbe Ding.

b) Ein Ding, das nicht ist, ist dennoch immer das Ding dem Begriffe nach.

c) Der Begriff eines Dinges bleibt, mag man dieses bejahen, oder verneinen. Verneine ich ein Ding, so hebe ich damit den Begriff dieses Dinges nicht auf. Da nun der Begriff eines Dinges ein Ding selber wieder ist, so ist auch ein nichtseiendes Ding ein Ding.

Anmerkung. Wenn $a = 0 . \infty$, und nach Obigem $a = 0$, so ist auch $0 = 0 . \infty$, also $\infty = \frac{0}{0} = 1$, und da $0 = 1$, auch $\infty = 0$.

Hat man also die Gleichung $a = 0$, so kann dieses 0 selber ein zweifaches Nichtsein bezeichnen; erstens das Nichtseiende im eigentlichsten Sinne, das verneinte Endliche, die Differenz des Endlichen von sich selber, und zweitens kann dieses 0 auch dasjenige Nichtseiende sein, welches gleich dem Unendlichen erwiesen wurde, ein über das Endliche hinausliegendes Nichtseiendes, wie jenes erste ein danach gefolgtes. Das über das Endliche hinausliegende Nichtseiende, das Unendliche ist nun aber der reine aprioriſche Begriff des Dinges, als aus welchem selber das endliche Sein gefolgert und geschaffen werden kann; das nach dem Endlichen folgende Nichtseiende ist das verneinte Endliche, das heißt, das endliche Ding dem bloßen Begriffe, Gedanken, Bilde, der Vorstellung nach seiend, ein späteres oder aposterioriſches Sein als das Endliche selber. Es unterscheidet sich also der Begriff eines Dinges von dem bloß dem Begriff nach seienden Ding. Das Produkt beider aber macht das endliche Ding selber aus wie $1 = 0 . \infty$.

Lehrsatz 10. Es ist $A + 0 \gtrless A + 0'$.

Beweis. Es ist $0'' \gtrless 0$, oder $0 . b \gtrless 0$, oder $0 (a - 1) \gtrless 0$;
$0 . a - 0 . 1 \gtrless 0$; $0' - 0 \gtrless 0$; $0' - 0 \gtrless A - A$; $A + 0' \gtrless A + 0$, das ist $A + 0 \gtrless A + 0'$.

Ist $A = \infty$, so ist auch $\infty + 0 \gtrless \infty + 0'$. Also
$0{,}9999999 \ldots\ldots + 0 \gtrless 0{,}9999999 \ldots\ldots + 0'$, das heißt:

Wenn die unendlichen Theile einer Einheit genommen werden, und von

Hosted by Google

einer andern Einheit die unendlichen Theile, so sind beide Einheiten an Größe verschieden, wenn ihre letzten Theile von den unendlichen Theilen verschieden sind.

Lehrsatz 11. Wenn die unendlichen Theile einer Einheit oder eines Ganzen genommen werden, so ist die Einheit selber größer als diese unendlichen Theile, und zwar um den letzten unendlichen Theil oder ein Nichtseiendes, welches den absoluten Werth des Ganzen in sich enthält.

Ein absoluter Werth eines Dinges ist ein solcher, der von allen quantitativen oder Größenbestimmungen absieht, das Ding aber angibt seiner Form, seinem Bilde nach oder seinem Begriff, also auch ein Nichtseiendes, welches die qualitativen Merkmale desselben enthält, oder ein quale, wenn nicht gerade ein quantum des Dinges.

Beweis. Es sei gegeben der endliche Bruch 0,9999, so fehlet an demselben, um ein Ganzes, die Einheit auszumachen, noch $\frac{1}{10000}$; ferner sei gegeben 0,99999, so fehlt noch $\frac{1}{100000}$; oder es sei gegeben 0,999999, so fehlet noch, um Eins auszumachen $\frac{1}{1000000}$ und so fort; also immer wenn gegeben $\frac{9}{10}$, so fehlet $\frac{1}{10}$, wenn $\frac{99}{100}$, so $\frac{1}{100}$, wenn $\frac{999}{1000}$, so $\frac{1}{1000}$ und so fort. Mithin auch, wenn der Bruch ins Unendliche fortgehet, wird auch noch, um ein Ganzes zu erhalten, $\frac{1}{\infty}$ hinzuaddirt werden müssen.

Oder auch von einem Ganzen oder einer Einheit sollen die unendlichen Theile genommen werden. So sei also zuerst von der Einheit genommen die Hälfte, so fehlet noch die Hälfte zum Ganzen, dann sei wieder die Hälfte dieser Hälfte genommen, daß man also hätte $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$, so fehlet noch $\frac{1}{4}$; wiederum sei vom fehlenden Viertel die Hälfte genommen, so daß man hat $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$, so fehlet noch zum Ganzen $\frac{1}{8}$; wieder sei $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}$, so fehlet noch $\frac{1}{16}$ und so weiter. Wenn nun die Theilung so fortgesetzt wird, so kann man niemals auf diese Weise das Ganze oder die Einheit erreichen, sondern es wird immer etwas, wenn auch noch so kleines fehlen; bei einer unendlichen Fortsetzung wird mithin auch immer ein unendliches Kleines noch zum Ganzen fehlen müssen, oder $\frac{1}{\infty}$. Folglich muß auch jene unendliche Reihe $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}$ ꝛc.

Hosted by Google

noch um $\frac{1}{\infty}$ vermehrt werden müssen, um das Ganze, die Einheit, zu erhalten. Nun ist aber $\frac{1}{\infty} = 0$. Also muß jene unendliche Reihe noch um 0 vermehrt werden, um die Einheit zu erhalten, oder bezeichnet A die unendliche Reihe, so hat man $1 = A + 0$, und daher auch $1 - 0 = A$. Dieses 0 aber drückt ein Nichtseiendes aus, und zwar jenes 1, dessen unendlicher Theil er ist, nichtseiend, so daß also es quantitätslos, aber an Qualität dasselbe, mit dem Eins bezeichnet.

Zusätze. 1) Das Endliche ist gleich einem Unendlichen vermehrt um die Qualität des Endlichen.

2) Das Endliche vermindert um seine Qualität, oder das qualitätslose Endliche ist ein Unendliches.

3) Das Quantum ein Seiendes, das Quale ein Nichtseiendes.

4) Das Quale eines Dinges ist gleich seinem Quantum. $1 = 0$, oder $A = 0$.

5) Wie daher das Endliche, das Quantitative verschiedene Bestimmungen annehmen kann, so also auch das Nichtseiende, oder das Qualitative. Es ist daher auch das Quale das Quantum des Quantums.

6) Das Nichtsein ist das Sein des Seins.

7) Das Nichtseiende ist das Sein des Seienden.

8) Keins ist das Eins des Eins, Null die Einheit von Eins, denn 0 der letzte unendliche Theil.

9) Null ist das Quale des Quantums Eins.

10) Das Quantum vermehrt um das Quale macht keine Vermehrung, ebenso $1 + 0 = 1$ bleibt.

Anmerkung 1. So wie das qualitätslose Endliche ein Unendliches ist, so kommt überhaupt nur dem Endlichen das quale, die Form zu, das Unendliche dagegen ist ohne quale. Es ist aber das quale des Endlichen, Stoffartigen vorzüglich ein dreifaches, weil auch sein Nichtseiendes ein dreifaches ausmacht, ein Ding A vollständig ein $\pm\pm A$ ist. Wenn hiervon der erste Werth $++A$ statt findet, so heiße das erste Nichtsein, der Schatten, weil untergeordnet, nemlich $+-A$ das subordinirte Quale, das zweite Nichtsein $-+A$, das Bild, heiße weil nebengeordnet, das coordinirte Quale, das dritte Nichtsein $--A$, des Bildes Schatten, weil dem frühern untergeordnet, das subordinirte Quale des coordinirten.

Anmerkung 2. Ist Geist das unendliche Unendliche, so Licht das endliche Unendliche. Ein endliches Unendliches hat, weil es unendlich ist, kein Quale, und weil wieder endlich kommt ihm eins dergleichen zu. Das endliche

Hosted by Google

Unendliche das Licht hat das coordinirte Quale, aber keine subordinirten. Im sinnlich wahrnehmbaren wirklichen Raume ist das Licht ein Unendliches, und hat kein quale im Gegensatz des Körperlichen, Stoffartigen als des Endlichen mit dem subordinirten Quale, dem Schatten; dagegen aller wirklicher wahrer oder Lichtraum ist selbst nur ein Endliches im Gegensatz des geistigen idealen Gedankenraumes, und erfordert daher als ein solches Endliches mit dem wirklichen Stoffartigen das gehörige oder coordinirte Quale. Es ergibt sich hieraus, daß der Schatten das Nichtseiende zum Unendlichen dem Lichte, aber das Bild das Nichtseiende ist zum Unendlichen, dem Geiste, sofern er einen intelligibilen Raum enthält.

Anmerkung 3. So wie einestheils Licht und Schatten im Gegensatz stehen zu dem Undurchdringlichen, Materiellen, Stoffartigen, andererseits wieder Licht den Gegensatz des Schattens als des Finstern ausmacht, ebenso muß auch erstens der intelligibele Raum der Ideen mit dem Scheinraume, dem Spiegelraume ein Entgegengesetztes bilden zu dem wirklichen wahren Raume, dann aber auch wird der intelligibele Verstandesraum ein geradezu Entgegengesetztes ausmachen zu dem Bildesraume.

Anmerkung 4. Hiernach lassen sich dreierlei verschiedene Welten unterscheiden, zuerst die Welt der Ideen, der *κόσμος νοητός*, dann die wirkliche oder sinnlich wahrnehmbare Welt und drittens die Spiegelwelt, Welt des Bildes. Die erste ist die unendliche, die zweite die endliche, die dritte die nichtseiende Welt.

Anmerkung 5. Oder auch dieselbe Welt erscheint uns dreifach, erstens in Gedanken, Ideen, zweitens in der wahrnehmbaren Wirklichkeit und drittens in Spiegelbildern.

Von dem sogenannten natürlichen oder auch hyperbolischen Logarithmensystem.

Wenn man die Einheit vermehrt um einen Theil derselben, also um einen Bruch, dessen Zähler die Einheit und dessen Nenner eine andere ganze Zahl ist, und diese Summe dann zu einer Potenz erhebt, deren Exponent gleich dem Nenner des Bruches ist, so erhält man in allen Fällen die ganze Zahl 2 mit noch einem Bruche, welcher je höher der Exponent immer mehr und mehr einen gleichmäßigen festen und bestimmten Werth annimmt. Man habe z. B.

$\left(1+\frac{1}{2}\right)^2$, so erhält man $\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} = 2{,}25$, dann $\left(1+\frac{1}{3}\right)^3 =$

$= \left(\frac{4}{3}\right)^3 = \frac{64}{27} = 2{,}370370$, ferner $\left(1+\frac{1}{4}\right)^4 = \left(\frac{5}{4}\right)^4 = \frac{625}{256} = 2{,}437$;

Hosted by Google

$\left(1+\frac{1}{10}\right)^{10} = \left(\frac{11}{10}\right)^{10} = 2{,}5935424501$, und fährt man so fort, so erhält man aus dem Binom $\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}$, wofern m etwas groß genommen wird, die Zahl 2,718281828459045..., welche auch besteht gleichmäßig für alle weitern Fälle, wo m noch größer genommen wird. Diese Zahl hat man nun mit dem lateinischen Buchstaben e bezeichnet, und sie zur Basis eines Systems der Logarithmen gemacht, welche man die natürlichen nennt. Auch heißt man sie die Neperschen, weil Neper zuerst dieselben gebrauchte; bisweilen auch werden sie die hyperbolischen genannt, weil die Zahlenreihen dieser Logarithmen die Flächen der gleichseitigen Hyperbel geben. Für die gewöhnliche Rechnung werden diese natürlichen Logarithmen nicht mehr gebraucht, sondern statt ihrer die sogenannten künstlichen, deren Basis 10 ist, auch die Briggischen genannt, weil Brigg sich derselben zuerst bedient hat. Aber in der höheren Mathematik finden die natürlichen Logarithmen immer noch ihre Anwendung.

Die Grenzen, zwischen welcher jeder Binom $\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}$ liegt, sind also die Zahl 2 und die Zahl 3, und die Grenzen des Werthes e zwischen 2,7 und 2,8. Ganz allgemein wird man durch die Entwickelung des Binoms die Grenzen in beiden Fällen erhalten. Es ist

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m} = 1^{m} + m \cdot 1^{m-1} \cdot \frac{1}{m} + \frac{m(m-1)}{1.2} \cdot 1^{m-2} \cdot \left(\frac{1}{m}\right)^{2} +$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} \cdot 1^{m-3} \cdot \left(\frac{1}{m}\right)^{3} +$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4} \cdot 1^{m-4} \cdot \left(\frac{1}{m}\right)^{4} +$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1.2.3.4.5} \cdot 1^{m-5} \cdot \left(\frac{1}{m}\right)^{5} +$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)(m-5)}{1.2.3.4.5.6} \cdot 1^{m-6} \cdot \left(\frac{1}{m}\right)^{6} +$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)(m-5)(m-6)}{1.2.3.4.5.6.7} \cdot 1^{m-7} \cdot \left(\frac{1}{m}\right)^{7} + \text{ꝛc.}$$

Bezeichnet man diese acht ersten Glieder der Reihe auf der zweiten Seite mit a, b, c, d. e, f, g, h, so ist erstes Glied $a = 1$; $b = 1$; $c = \frac{1-\frac{1}{m}}{1.2}$;

$$d = \frac{1\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)}{1.2.3} = \frac{1-\frac{3}{m}+\frac{2}{m^2}}{6}; \quad e = \frac{1-\frac{3}{m}+\frac{2}{m^2}}{6} \cdot \frac{\left(1-\frac{3}{m}\right)}{4},$$

Hosted by Google

oder $e = -\frac{1 - \frac{6}{m} + \frac{11}{m^2} - \frac{6}{m^3}}{24}$; ferner $f = \frac{1 - \frac{6}{m} + \frac{11}{m^2} - \frac{6}{m^3}}{24} \cdot \frac{1 - \frac{4}{m}}{5}$, oder

$f = \frac{1 - \frac{10}{m} + \frac{35}{m^2} - \frac{50}{m^3} + \frac{24}{m^4}}{120}$; $g = \frac{1 - \frac{10}{m} + \frac{35}{m^2} - \frac{50}{m^3} + \frac{24}{m^4}}{120} \cdot \frac{1 - \frac{5}{m}}{6}$,

oder $g = \frac{1 - \frac{15}{m} + \frac{85}{m^2} - \frac{225}{m^3} + \frac{270}{m^4} - \frac{120}{m^5}}{720}$;

$h = \frac{1 - \frac{15}{m} + \frac{85}{m^2} - \frac{225}{m^3} + \frac{270}{m^4} - \frac{120}{m^5}}{720} \cdot \frac{1 - \frac{6}{m}}{7}$, oder

$h = \frac{1 - \frac{21}{m} + \frac{175}{m^2} - \frac{735}{m^3} + \frac{1620}{m^4} - \frac{1720}{m^5} + \frac{720}{m^6}}{5040}$.

Bei einem jeden solchen Gliede wechselt ein positiver Ausdruck im Zähler stets mit einem negativen ab, so daß auf die erste positive Größe die negative, auf diese wieder die positive folgt, und so fort; ferner sind die Nenner der Brüche im ganzen Zähler so beschaffen, daß sie von Potenz zu Potenz fortsteigen, von der ersten kleinsten Potenz m bis zu einer solchen, deren Exponent um 2 kleiner ist, als in welchem wie vielten Gliede sie sich befinden; so z. B. im sechsten Gliede f sind die Nenner steigend von der ersten Potenz bis zur vierten, von m bis zu m^4, im achten Gliede h von m bis m^6, u. s. w. Nun läßt sich hieraus einigermaßen auf ein Verhältniß schließen, in welchem die Glieder des Zählers zu einander stehen könnten. Es mag nemlich das letzte Glied kleiner als das vorletzte, die Summe der beiden letzten kleiner als das drittletzte, und so überhaupt jedes Glied des Zählers größer sein als die Summe aller noch folgenden in demselben Zähler. Um dieses zu erfahren, versuchen wir es einmal bei demjenigen Gliede der Reihe des Binoms, in welchem zuerst abwechselnd positive wie negative Größen sich finden. Dieses aber ist das dritte Glied $c = \frac{1 - \frac{1}{m}}{1.2}$. Weil es hier wenigstens drei Glieder der Reihe gibt, aber der Exponent des Binoms um 1 kleiner ist, als die Anzahl der Glieder, so kann m nicht kleiner als 2 sein; also ist in obigem Ausdruck des Werthes von c immer $1 > \frac{1}{m}$. Das vierte Glied hieß $d = \frac{1 - \frac{3}{m} + \frac{2}{m^2}}{6}$; hier

Hosted by Google

also muß m gleich oder größer als 3 sein; alsdann ist immer $\frac{3}{m} > \frac{2}{m^2}$, und dann macht $-\frac{3}{m} + \frac{2}{m^2}$ nicht ein 1 aus. Das fünfte Glied wird, indem das vierte noch mit $\frac{1-\frac{3}{m}}{4}$ multiplizirt wird. Hier muß m wenigstens 4 sein, also $\frac{3}{m} < 1$. Wird nun zuerst $1 - \frac{3}{m} + \frac{2}{m^2}$ multiplizirt mit 1, darauf mit $-\frac{3}{m}$, so entsteht:

$$\left\{\begin{array}{l} 1 - \frac{3}{m} + \frac{2}{m^2} \\ \quad 1 - \frac{3}{m} \\ \hline 1 - \frac{3}{m} + \frac{2}{m^2} \\ \quad -\frac{3}{m} + \frac{9}{m^2} - \frac{6}{m^3} \\ \hline 1 - \frac{6}{m} + \frac{11}{m^2} - \frac{6}{m^3} \end{array}\right\}$$

Da nun immer das vorhergehende Glied sowohl bei $1 - \frac{3}{m} + \frac{2}{m^2}$ als auch $1 - \frac{3}{m}$ größer ist, als die Summe aller nachfolgenden, so muß auch, wenn ich ein und dasselbe multiplizire mit dem größern, darauf mit dem kleinern, ersteres noch ein größeres ausmachen, als letzteres, oder auch bei $-\frac{3}{m} + \frac{9}{m^2} - \frac{6}{m^3}$ muß $\frac{9}{m^2} > \frac{6}{m^3}$ und $-\frac{3}{m}$ numerisch mehr betragen als $\frac{9}{m^2} - \frac{6}{m^3}$, also auch die Summe der größeren mehr als die der kleineren Größen, oder $\frac{11}{m^2} > \frac{6}{m^3}$, und $\frac{6}{m} > \frac{11}{m^2} - \frac{6}{m^3}$, endlich

$-\frac{6}{m} + \frac{11}{m^2} + \frac{6}{m^3} > -1$, dieses letztere, weil das ganze Glied der Reihe eine positive Größe werden muß. Wie aber dieses sich beweisen ließ bei dem fünften Gliede der Reihe, so kann es dann auch für das sechste, darauf für das siebente, darauf für das achte und so immer für das folgende Reihenglied bewiesen werden, indem auf ähnliche Weise jedes folgende Glied entsteht aus dem vorhergehenden, daß dieses noch mit $\frac{1-\frac{n}{m}}{n+1}$ multiplizirt wird, woselbst immer $\frac{n}{m}$ einen ächten Bruch ausmacht, oder m zum wenigsten $n + 1$ ist.

Aber auch aus jedem einzelnen Reihenglied für sich kann man finden, daß jedes Glied seines Zählers größer sein muß, als die Summe aller folgenden

Hosted by Google

Glieder des Zählers. Es sei z. B. g das siebente Glied einer Reihe von 14 Gliedern, so ist also $m = 13$, und dann hat man:

$g = \frac{1 - \frac{15}{13} + \frac{85}{13^2} - \frac{225}{13^3} + \frac{270}{13^4} - \frac{120}{13^5}}{720}$. Hier muß zuerst $\frac{270}{13^4} > \frac{120}{15^5}$ sein, denn es ist $270 . 13 > 120$, dann ist $225 . 13 > 270$; ebenso $85 . 13 > 225$, und $15 . 13 > 85$, mithin auch im Zähler des Reihengliedes g irgend ein Glied immer größer als die Summe der übrigen.

Für das achte Glied einer Reihe aus elf Gliedern, wo also $m = 10$ wird

$h = \frac{1 - \frac{21}{10} + \frac{175}{10^2} - \frac{735}{10^3} + \frac{1620}{10^4} - \frac{1740}{10^5} + \frac{720}{10^6}}{5040}$. Hier ist $\frac{17400}{10^6} > \frac{720}{10^6}$; $16200 > 1740$; $7350 > 1620$; $1750 > 735$; $210 > 175$, daher um so mehr ein Glied des Zählers größer als die Summe aller folgenden Glieder des Zählers.

Aus allen diesen Beispielen irgend welcher beliebigen Glieder unserer Reihe bestätigt es sich, daß irgend ein Größenausdruck im Zähler immer größer ist, als die Summe aller übrigen in demselben Zähler. Gilt nun dieses allgemein, so muß auch, wenn ich im Zähler nach einer negativen Größe die nachfolgenden übrigen Ausdrücke auslasse, das Glied der Reihe zu klein werden, und wenn nach einem positiven Werthe, so zu groß. Denn im erstern Falle gibt die Summe der noch übrigen Größen ein Positives, im andern Falle ein Negatives. Daher wird auch, wo fast in jedem Gliede der Reihe die Auslassungen stattfinden:

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m > 1 + 1 + \frac{1 - \frac{1}{m}}{2} + \frac{1 - \frac{3}{m}}{6} + \frac{1 - \frac{6}{m}}{24} + \frac{1 - \frac{10}{m}}{120} + \frac{1 - \frac{15}{m}}{720} +$$

$$+ \frac{1 - \frac{21}{m}}{5040} \text{ ꝛc. und } \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m < 1 + 1 + \frac{1 - \frac{1}{m}}{2} + \frac{1 - \frac{3}{m} + \frac{2}{m^2}}{6} +$$

$$+ \frac{1 - \frac{6}{m} + \frac{11}{m^2}}{24} + \frac{1 - \frac{10}{m} + \frac{35}{m^2}}{120} + \frac{1 - \frac{15}{m} + \frac{85}{m^2}}{720} + \frac{1 - \frac{21}{m} + \frac{175}{m^2}}{5040} + \text{ ꝛc.}$$

Was die erstere Reihe betrifft, so erkennt man leicht, daß die Summe aller derjenigen Glieder, worinnen m als Nenner eines Bruches vorkommt, keine $\frac{2}{m}$ betragen kann. Denn es ist: $-\frac{\frac{1}{m}}{2} - \frac{\frac{3}{m}}{6} - \frac{\frac{6}{m}}{24} - \frac{\frac{10}{m}}{120} - \frac{\frac{15}{m}}{720} - \frac{\frac{21}{m}}{5040} - \text{ ꝛc.}$

Hosted by Google

$$= -\frac{1}{m} - \frac{\frac{60}{240}}{m} - \frac{\frac{20}{240}}{m} - \frac{\frac{5}{240}}{m} - \frac{\frac{1}{240}}{m} - \text{ꝛc.} = -\frac{1}{m} - \frac{\frac{86}{240}}{m} - \text{ꝛc.}$$

$$= -\frac{1}{m} - \frac{\frac{43}{120}}{m} - \text{ꝛc.}$$ Um so mehr muß daher $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m > 1+1+\frac{1}{2}+$

$+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{1}{120}+\frac{1}{720}+\frac{1}{5040}+\text{ꝛc.}-\frac{2}{m}$. Zur Vollständigkeit der zweiten Reihe gehörte dazu, daß vom dritten Gliede an nach dem ersten Größenausdruck im Ganzen ein Abzug stattfinden mußte, damit man nichts zu Großes erhielt. War also schon die Reihe zu groß, so wird sie noch mehr zu groß werden, wenn außer dem dritten Gliede vom vierten Gliede an selbst der erste Abzug unterbleibt. Daher muß noch mehr

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m < 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{1}{120}+\frac{1}{720}+\frac{1}{5040}+\text{ꝛc.}-\frac{1}{2m}.$$

Oder es ist nun auch $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m > 1+1+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{1.2.3.4}+$

$+\frac{1}{1.2.3.4.5}+\frac{1}{1.2.3.4.5.6}+\text{ꝛc.}-\frac{2}{m}$, und

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m < 1+1+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{1.2.3.4}+\frac{1}{1.2.3.4.5}+$$

$$+\frac{1}{1.2.3.4.5.6}+\text{ꝛc.}-\frac{1}{2m}.$$

Von den verschiedenen Einheiten.

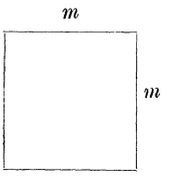
In obigen binomischen Reihen erhielten wir den Werth der Einheit aus verschiedenen Potenzen derselben, wie aus 1^4, aus 1^3, aus 1^{10-5} und so weiter. Wenn nun zwar es bei der Zusammenrechnung keinen Unterschied auszumachen scheint, aus der wievielten Potenz die Einheit erhalten wurde, so fragt sich, sind auch deßhalb jene Einheiten unter sich identisch, oder unterscheiden sie sich unter einander, so wie etwa bei einer Zusammenzählung verschiedener Stücke, deren jedes für ein einiges gilt, diese Stücke selber unter einander verschieden sein können; mit andern Worten: ist auch an und für sich $1^4 = 1^3 = 1^{10-5}$, oder ist $1^2 = 1$, ist es richtig gesagt: Ein mal Eins ist Eins. Wäre wirklich $1.1 = 1$, so müßte auch, wenn die Einheit selber wieder aus einer verschiedenen Anzahl von Theilen bestände, zum Beispiel aus zwei, aus drei, aus vier Theilen, es auch richtig bleiben, wenn dieselben statt der Einheit gesetzt würden, also

Hosted by Google

müßte auch $2.2 = 2$, $3.3 = 3$, und $4.4 = 4$ sein, welches unmöglich. Mithin kann auch 1.1 nicht gleich 1, sondern nur gleich 1^2 sein, so wie auch $2.2 = 2^2$, $3.3 = 3^2$, und $4.4 = 4^2$ ist.

Ebenfalls kann 1.1^2 nur 1^3 und $1.1^3 = 1^4$, aber nicht auch 1.1^2 gleich 1^2 und 1.1^3 gleich 1^3 sein. Denn in diesem Falle müßte auch $2.2^2 = 2^2$, und $2.2^3 = 2^3$ sein, da doch $2.2^2 = 2^3$, und $2.2^3 = 2^4$ ist. Mithin müssen die verschiedenen Potenzen derselben Einheit, wenn gleich immer eine Einheit, so doch stets eine unterschiedliche ausmachen. Es bezeichne 1 eine gewisse Linie $\underline{\quad m \quad}$, so wird, wenn 1 mit dem ihm gleichen 1 multiplizirt wird, oder 1.1 das Quadrat werden, welches auf der Linie m errichtet wird. Denn die Linie die Linie mal nehmen, geschieht, wenn die Linie m auf einer ihr gleichen senkrecht stehenden andern Linie von Anfang bis zu Ende derselben sich so fortbewegt, daß die Linie m auf der andern Linie in derselben Ebene stets senkrecht bleibt. (S. Fig. 6.) Bewegt sich dann die so erhaltene Quadratsfläche in allen Punkten gleichmäßig in darauf senkrechter Richtung fort um die Länge der Linie m, so ist der Raum, in dem sich die Fläche bewegt hat, weil diese die Linie m mal genommen wurde, auch ein Produkt aus der Quadratfläche und der Linie, oder da das Quadrat gleich $1.1 = 1^2$, aus 1^2 und 1, also 1^3, oder der Cubus der Linie. Es verhalten sich mithin $1 : 1^2 : 1^3$, wie die Linie zu ihrem Quadrat, zu ihrem Cubus, als Einheiten also, wie die lineare zur Quadrats- zur cubischen Einheit.

Fig. 6.

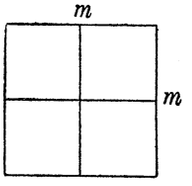


Wie aber 1.1 niemals ohne weiteres dasselbe 1, sondern 1^2, oder eine andere verschiedene Einheit ist, so wird auch weder 2.2 unbedingt 4, noch 2.3 gleich 6, oder 2.4 gleich 8 sein, so nemlich, daß alle diese Zahlen aus gleichen oder denselben Einheiten zusammen gesetzt sind. Denn wäre z. B. 2.2 gleich 4, so müßte auch bei gleichen Einheiten dieser Zahlen, wenn man eine beliebige Anzahl wieder unter ein Ganzes, die Einheit, auffaßte, wie etwa 2, auch $1.1 = 2$ sein; aber es ist $1.1 = 1^2$, das heißt, wie kurz vorher erwiesen, eine andere Einheit. Oder wäre $2.3 = 6$ mit gleichen Einheiten, so wird auch, da jede Einheit aus zwei Hälften besteht, die Zahl 2 aus 4 Hälften, die Zahl 6 aus 12 Hälften bestehen. Setzte man also anstatt der Ganzen ihre Theile, die die Ganzen ausmachen, so müßte auch $4.6 = 12$ sein. Aber 4.6 soll 24 sein, mithin müßte auch 24 gleich 12 sein, welches unmöglich. Mithin können auch bei der Multiplikation die Einheiten in den Faktoren und dem Produkt nicht gleich und dieselben sein, oder so wenig $1.1 = 1$, so wenig ist auch genau genommen $2.2 = 4$, $2.3 = 6$, $8.3 = 24$, und so weiter. Es läßt sich dieses auch wieder geometrisch beweisen. Wenn die Linie m mit sich selber multiplizirt wird, so entsteht die Quadratfläche über dieser Linie. Ist nun das Maß der

Hosted by Google

Linie m gleich 2 Zoll, so ist die Fläche $2^2 = 4 \square$ Zoll. Also die Linie 2 multiplizirt mit der Linie 2 macht nicht eine Linie 4 aus, sondern 4 solcher Quadratflächen, deren Grundlinie bei jeder das einheitliche Maß der ersten Linie ist. (S. Fig. 7.) Aehnlicherweise wenn eine Linie von 3 Zoll mit einer andern von 2 Zoll multiplizirt wird, so entsteht eine Fläche, welche aus 6 solcher kleinen Quadrate besteht, und nicht auch macht die Linie 2 multiplizirt mit der Linie 3 eine Linie 6 aus. (S. Fig. 8.)

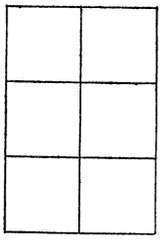
Fig. 7.



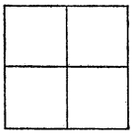
Demgemäß wird bei der linearen Einheit 1 unser Einmal Eins auf folgende Weise zu berichtigen sein.

1 mal 1 ist 1 Quadrat,

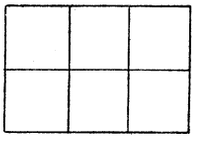
Fig. 8.



2 mal 2 ist 4 Quadrate,



2 mal 3 ist 6 Quadrate,



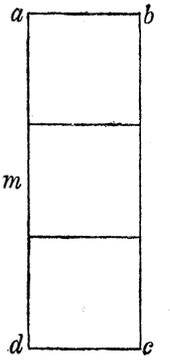
und so weiter.

Wenn also 1, 1^2 und 1^3 so unterschieden sind, daß $1^2 = 1.1$, und $1^3 = 1.1^2$, so muß auch $1^2 = \frac{1^3}{1} = 1^{3-1}$, und $1 = \frac{1^2}{1} = 1^{2-1}$ sein. Also erhält man auch aus dem Cubuskörper die Quadratfläche dadurch, daß jener durch die Linie dividirt wird, und aus der Quadratfläche die Linie, daß jene durch diese dividirt wird. Ist nun die Linie 1, und dividirt man diese durch sich selber, so erhält man $\frac{1}{1} = \frac{1'}{1'} = 1^{1-1} = 1^0$; mithin ist auch $1 = 1.1^0$. Es ist aber nur der Punkt die Linie mal genommen gleich der Linie selber, folglich ist auch 1^0 gleich dem Punkte der Linie, und die Linie dividirt durch sich selber muß den Punkt geben. Folglich verhält sich die Einheit, die durch 1^0 ausgedrückt wird zu der Einheit, welche 1′ bezeichnet, wie die Punktseinheit

Hosted by Google

zu der linearen. — Da $2.1 = 2.1$, so ist auch $\frac{2}{2} = \frac{1}{1} = 1^0$, aus demselben Grunde auch, da $3.1 = 3.1$ ist $\frac{3}{3} = \frac{1}{1} = 1^0$, oder jede Zahl dividirt durch sich selber gibt die Einheit in der nullten Potenz $\frac{a}{a} = 1^0$, oder auch jede Zahl in der nullten Potenz ist gleich der Einheit in der nullten $a^0 = 1^0$. Mithin ist auch $2 = 2.1^0$, $3 = 3.1^0$, $a = a.1^0$. Also die Einheit in der nullten Potenz multiplizirt mit irgend einer Zahl gibt diese Zahl selbst wieder. Wird aber die Zahl mit der Einheit selber, das heißt mit der Einheit in der ersten Potenz multiplizirt, so kann dieses Produkt die Zahl selber nicht mehr so wiedergeben, daß sie nach denselben Einheiten, sondern daß sie nach von jenen verschiedenen gerechnet wird. Bei 1.1 war früher bewiesen, daß das Produkt nach einer verschiedenen Einheit ein Eins ist, aber auch 2.1 kann nicht gleich 2 derselben Einheit, 3.1 nicht 3, 10.1 nicht 10 sein. Denn wäre $2.1 = 2$, so auch $1 = \frac{2}{2}$, aber es ist $\frac{2}{2} = 1^0$ nach Obigem, also müßte auch $1 = 1^0$, und $1.1 = 1.1^0$, oder da $1.1^0 = 1$, auch $1.1 = 1$ derselben Einheit sein, welches unmöglich. Ebenso wenn $3.1 = 3$, so $1 = \frac{3}{3} = 1^0$ gegen das Frühere, oder allgemein wenn $a.1 = a$, so $1 = \frac{a}{a}$, und da $\frac{a}{a} = 1^0$, auch $1 = 1^0$, welches unmöglich. Dieß zeigt sich auch geometrisch. Setzen wir, 3 sei die Länge der Linie m oder ad, so würde 3.1^0 wieder dieselbe Linie geben ad, aber 3.1 wäre die Linie ad mal der Linie ab, oder das Rechteck abcd, dessen eine Seite $ad = 3$, die andere $ab = 1$ ist. (S. Fig. 9.)

Fig. 9.



Wie sich nun der Punkt 1^0 zur Linie $1'$ verhält, so die Linie zur Quadratfläche 1^2, so diese zum Cubus 1^3. Es ist nemlich $1^0 : 1' = 1' : 1^2$, und $1' : 1^2 = 1^2 : 1^3$. Ein Körper hat unendlich viele Flächen, die Fläche unendlich viele Linien, die Linie unendlich viele Punkte in sich. Daher ist auch die Fläche der unendliche Theil $\frac{1}{\infty}$ des Körpers, die Linie der unendliche Theil $\frac{1}{\infty}$ der Fläche, und der Punkt der unendliche Theil $\frac{1}{\infty}$ der Linie. Ein unendlicher Theil eines Dinges aber ist ein Nichtseiendes zu diesem Dinge selber, und es ist auch, wenn der Körper oder Cubus als seiend oder wirklich gesetzt wird,

Hosted by Google

die Fläche ein Nichtseiendes; weil sie ohne Höhe also unkörperlich gedacht werden muß: ebenso wenn uns die Fläche als wahr und wirklich gilt, so ist eine Linie in derselben ein Nichtseiendes, weil wiederum die mathematische Linie ohne Breite ist, keinen Theil der Fläche ausmacht. Endlich ist uns die Linie seiend und wirklich, so ist ein Punkt derselben, weil ohne Länge, ein Nichtseiendes. Dennoch muß der Punkt unendlich mal genommen die Linie ausmachen, ferner die Linie unendlich mal genommen die Fläche geben, und die Fläche unendlich mal den Körper, weil ein Nichtseiendes multiplizirt mit dem Unendlichen das Endliche gibt.

Wird der Cubus 1^3 durch sich selber durch 1^3 dividirt, so erhält man $\frac{1^3}{1^3} = 1^{3-3} = 1^{1+1+1-1-1-1} = 1^{0+0+0} = 1^{3.0}$, auch ist, da $1 = 1.1^0$ (die Linie gleich der Linie multiplizirt mit dem Punkte) $1.1.1 = 1.1^0.1.1^0.1.1^0$, also $1^3 = 1^3.1^{3.0}$, mithin auch $\frac{1^3}{1^3} = 1^{3.0}$.

Wird die Quadratfläche durch sich selber dividirt, so ist $\frac{1^2}{1^2} = 1^{2-2} =$ $= 1^{1+1-1-1} = 1^{0+0} = 1^{2.0}$, dasselbe wird auch, wenn man davon ausgeht, daß $1 = 1.1^0$, denn dann ist $1.1 = 1.1^0.1.1^0$, mithin $1^2 = 1^2.1^{2.0}$, also $\frac{1^2}{1^2} = 1^{2.0}$. Die Linie durch sich selber dividirt war $\frac{1}{1} = 1^0$, der Punkt durch sich dividirt gibt $\frac{1^0}{1^0} = 1^{0-0}$, oder $\frac{1^0}{1^0} = 1^{1-1-(1-1)} = 1^{1-1-1+1} = 1^{0+0} = 1^{2.0}$ gleich dem Quotient der Fläche dividirt durch sich selber. Wird dieses $1^{2.0}$ wieder durch den Punkt dividirt, so erhält man $\frac{1^{2.0}}{1^0} = 1^{1-1-1+1-1+1} = 1^{3.0}$ gleich dem Quotient des durch sich selber dividirten Cubus.

Wird statt der linearen Einheit bei der Quadratfläche dieses Quadrat selber als Einheit gesetzt, so macht auch wenn F gleich der Quadratfläche ist, oder auch wenn F mehrere Quadrate enthält $\frac{F}{F} = 1^0$, und $F = F.1^0$; und wird bei dem Körper K der Cubus als Einheit gesetzt, so ist $\frac{K}{K} = 1^0$, und $K = K.1^0$. Daher ist auch 1^0 der Quadrateinheit gleich $1^{2.0}$ der linearen und 1^0 der Cubuseinheit gleich $1^{3.0}$ der linearen Einheit.

Wenn der Raum und alles in dem Räumlichen Befindliche als wirklich und seiend betrachtet wird, so ist dieses Räumliche, wenn es dem bloßen Denken den Begriffen nach stattfindet, so wie das in demselben Gedachte und Gesetzte ein Nichtseiendes, Nichtwirkliches; also auch Körper, Fläche, Linie, Punkt des

Hosted by Google

wirklichen Raumes verhalten sich zu demselben dem bloßen Denken nach, wie ein Seiendes zum Nichtseienden. Nun nennt man den umgesetzten Punkt, d. h. den bloß im Denken befindlichen vorzugsweise eine Monade, d. i. Einheit. So wie daher im sinnlich wahrnehmbaren Raume die Linie multiplizirt mit dem Punkte die Linie gibt, die Quadratfläche multiplizirt mit dem Quadratpunkt die Quadratfläche, und der Cubus multiplizirt mit dem Cubikpunkt den Cubus, so wird auch dem bloßen Begriffe nach die Linie multiplizirt mit der Monade die Linie, die Fläche multiplizirt mit der Quadratmonade die Fläche, und der Körper multiplizirt mit der Cubikmonade den Körper geben müssen. Es läßt sich demnach das Einmal Eins auch noch in folgender Weise darstellen. Zuerst bei der linearen Einheit:

1 mal 1 Punkt ist 1,

2 mal 2 Punkte ist 4,

2 mal 3 Punkte ist 6

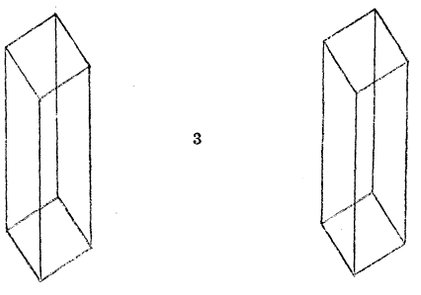
und so weiter. Zweitens bei der Quadratflächen-Einheit:

1 mal 1 Quadratpunkt ist 1

2 mal 2 Quadratpunkte ist 4

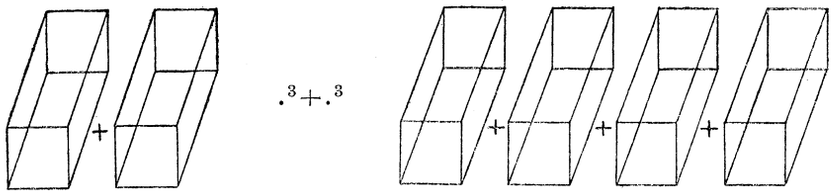
und so weiter. Drittens bei der kubischen Einheit:

1 mal 1 Cubikpunkt ist 1



Hosted by Google

3 mal 2 Cubikpunkte ist 4,



und so weiter. Endlich geschieht die Handlung des Multiplizirens bloß im Denken, so wird

1 mal 1 Monade ist 1
2 mal 2 Monaden ist 4
2 mal 3 Monaden ist 6

} und so weiter, woselbst nur bei der Quadrateinheit die Monaden auch in Quadratmonaden, und bei der cubischen dieselben in Cubikmonaden verwandelt werden müssen. Man könnte daher auch das Einmal Eins von solch einer Form, wo immer eine Größe mit einem Punkt oder einer Monade multiplizirt wir, das Monaden-Einmal-Eins nennen im Gegensatz jenes frühern, welches, weil man als Einheit immer das Quadrat der frühern Einheit erhält, deßwegen auch das Quadraten-Einmal-Eins heißen würde.

So wie aber bei der Multiplikation die 3 Glieder, beide Faktoren und Produkt, niemals dieselben Einheiten haben können, sondern immer nur 2 Glieder dieselbe Einheit, das dritte eine verschiedene haben muß, also wenn die beiden Faktoren dieselbe Einheit, so das Produkt eine verschiedene, und wenn ein Faktor und das Produkt dieselbe, so der andere Faktor eine davon verschiedene, so können auch bei der Division Dividendus, Divisor und Quotient niemals aus ein und derselben Einheit hervorgehen, sondern wenn je zwei eine gleiche Einheit erfordern, so ist die des dritten Theiles davon unterschieden. Wenn 2 mal 3 gleich 6 Quadrate, so kann nicht $\frac{6}{2}$ gleich 3 sein, denn sonst wäre 6 gleich 2.3, also bloß $\frac{6 \text{ Quadrate}}{2} = 3$, oder wenn 2 mal 3 Punkte gleich 6, oder 2 mal 3 Monaden gleich 6, so kann auch 2 nicht gleich $\frac{6}{3}$, sondern nur $\frac{6}{3 \text{ Monaden}}$ sein, weil sonst 2.3 gleich 6 sein würde. Also kann nur $\frac{16}{2 \text{ Monaden}} = 8$ sein, weil 16 gleich 2 Monaden mal 8, und $\frac{16 \text{ Quadrate}}{2} = 8$, weil 16 Quadrate gleich 2 mal 8, oder $\frac{16}{2} = 8$ Monaden, weil 16 gleich 2 mal 8 Monaden. Also erhält man, wenn Größen derselben Einheit durch einander dividirt werden,

Hosted by Google

eine Größe von monadlichen Einheiten, und nur die Größen derselben Einheiten wieder, wenn entweder der Dividendus aus Quadraten oder der Divisor aus Monaden-Einheiten besteht. — Bei der unendlichen Wurzel aus einer beliebigen Größe wird die erhaltene Einheit ebenfalls eine Monaden-Einheit, das heißt 1^0 sein müssen, weil nemlich $\sqrt[\infty]{a} = \sqrt[\infty]{a'} = a^{\frac{1}{\infty}} = a^0 = 1$.

Auch bei der Gleichung $a = 1^\infty$ kann dieses 1 nur die Monaden-Einheit sein. Denn da $a^0 = 1^0$, so ist auch $a^{0.\infty} = 1^{0.\infty}$, oder $a = 1^{0.\infty}$, das heißt also: eine beliebige Größe a ist gleich der Monaden-Einheit zur unendlichen Potenz erhoben. Wird eine unendliche Größe durch sich selber dividirt, so gibt dieses die Monaden-Einheit, ebenso bei der Division einer Null in sich selber. Denn da $\infty.1 = \infty.1$, so ist $\frac{\infty}{\infty} = \frac{1}{1} = 1^0$, und da auch $0.1 = 0.1$, so ist $\frac{0}{0} = \frac{1}{1} = 1^0$. Mithin ist auch nur $1^0.\infty = \infty$, daß dieses Unendliche dasselbe mit dem ersten, und $1.\infty = \infty$ von verschiedener Einheit; ebenso nur $1^0.0 = 0$ derselben Einheit, und $1.0 = 0$ aus verschiedener Einheit. Wenn also bei $\frac{\infty}{\infty}$ der Divisor ∞ aus monadlichen Einheiten besteht, dagegen der Dividendus aus ersten positiven, so wird auch da die positive Einheit erhalten. Denn es ist $1 + 1 + 1 + 1 + 1$ etc. $= (1^0 + 1^0 + 1^0 + 1^0 + 1^0$ etc.) oder $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$ etc. $= 1\left(\frac{1^0}{2} + \frac{1^0}{4} + \frac{1^0}{8} + \frac{1^0}{16} + \text{etc.}\right)$. Mithin ist auch das Unendliche der positiven Einheit gleich dem Unendlichen der monadlichen Einheit multiplizirt mit der positiven Einheit selber; und das Nichts, welches die Differenz der positiven Einheit von sich selber, ist gleich dem Produkt aus der positiven Einheit in die Differenz der monadlichen Einheit von sich selber. Also auch in der Formel $\frac{\infty}{\infty'} = A$, und $\frac{0}{0'} = B$ muß, wenn erstens A aus positiven Einheiten bestehen soll, jenes ∞' monadliche Einheiten enthalten; denn nur in diesem Falle wird $\infty = A.\infty'$; zweitens muß $0'$ die Differenz sein von Zahlen monadlicher Einheit, wenn gleichfalls B aus positiven Einheiten zusammengesetzt sein soll; denn nur in diesem Falle wird $0 = B.0'$.

Bezeichnen $+1^4 + 1^3 + 1^2 + 1^1 + 1^0$ die verschiedenen Einheiten in einer positiven wie etwa linkeren Richtung, so daß man rechts ausgeht vom Ausgangspunkte 1^0 aus, so werden durch $-1^0 - 1^1 - 1^2 - 1^3 - 1^4$ dieselben Einheiten ausgedrückt werden von der negativen, d. h. rechteren Richtung, daß man links ausgeht vom Ausgangspunkte -1^0 aus. Wenn dagegen $+1^4 + 1^3 + 1^2 + 1^1 + 1^0$ die weiteren in gleichem Verhältnisse fortlaufenden

Hosted by Google

Einheiten gesucht werden, so ist zuerst 1^0 durch 1^1 zu dividiren. Dadurch erhält man $\frac{1^0}{1^1} = 1^{0-1}$; ferner wird $\frac{1^{0-1}}{1^1} = 1^{0-2}$, darauf wird $\frac{1^{0-2}}{1^1} = 1^{0-3}$, dann $\frac{1^{0-3}}{1^1} = 1^{0-4}$ und so weiter, so daß

$+ 1^4 + 1^3 + 1^2 + 1^1 + 1^{0-1} + 1^{0-2} + 1^{0-3} + 1^{0-4}$ in fortgesetzter geometrischer Progression zu einander stehen. Ist nun 1 die lineare Einheit, so ist 1^4 ein Körper mal der Linie, 1^3 ein Cubus, aber 1^2 eine Fläche, 1^1 eine Linie, 1^0 ein Punkt, und mithin müssen alle folgenden Glieder, jedes weniger als ein Punkt betragen; sodann jedes folgende Glied kleiner als das vorhergehende sein. Denn zuerst theilt sich in den Punkt die Linie bei 1^{0-1}, dann die Fläche, da $1^{0-2} = \frac{1^0}{1^2}$, darauf der Cubus, denn $1^{0-3} = \frac{1^0}{1^3}$, endlich ein Körper mal der Linie, weil $1^{0-4} = \frac{1^0}{1^4}$, und so fort. Es ist also auch $1^0 = 1^{0-1} . 1^1 =$
$= 1^{0-2} . 1^2 = 1^{0-3} . 1^3$, daher auch $1^0 . 1^1 = 1^{0-1} . 1^2 = 1^{0-2} . 1^3 = 1^{0-3} . 1^4$, und $1^0 . 1^2 = 1^{0-1} . 1^3 = 1^{0-2} . 1^4$. Da in dem Bruche $\frac{1^0}{1^1} = 1^{0-1}$ der Zähler 1^0 unendlich klein ist gegen den Nenner 1^1, so muß auch 1^{0-1} gleich 0, gleich einem Nichtseienden sein, und zwar muß 1^{0-1} dasselbe nichtseiend bezeichnen, was 1^0 seiend ist; mithin heißt auch $1^0 = 1^{0-1} . 1^1$: ein seiender Punkt ist gleich einer nichtseienden Linie, und $1^0 . 1^1 = 1^{0-1} . 1^2$, eine seiende Linie ist gleich einer nichtseienden Fläche, und $1^0 . 1^2 = 1^{0-1} . 1^3$ heißt: eine seiende Fläche ist gleich einem nicht seienden Körper-Raume. Es spiegelt mithin der Punkt die Linie, die Linie die Fläche, und die Fläche den körperlichen Raum wieder.

Wenn in der Reihe $+ 1^4 + 1^3 + 1^2 + 1^1 + 1^0 - 1^0 - 1^1 - 1^2 - 1^3 - 1^4$ die Mittelglieder $+ 1^0 - 1^0$ reduzirt werden, so erhält man eine monadliche Null, ebenfalls machen immer zwei von diesen gleich weit entfernten Gliedern eine Null, ein Nichts aus: jedoch sind die Nullen selbst unter sich unterschieden. Denn zuerst ist $+ 1^1 - 1^1$ gleich der positiven Null, die von der monadlichen unterschieden; ebenso $+ 1^2 - 1^2$ ist 1^2 nichtseiend, also etwas anderes als 1^1 nichtseiend, und so weiter. Dagegen machen bei der Reihe
$+ 1^4 + 1^3 + 1^2 + 1^1 + 1^0 + 1^{0-1} + 1^{0-2} + 1^{0-3} + 1^{0-4}$ zwei gleich weit vom mittelsten Gliede 1^0 abstehenden mit einander multiplizirt immer eine verschiedene nomadliche Einheit aus. Zuerst ist $1^0 . 1^{0-1} = 1^{0+1-1} = 1^{2.0}$ gleich der Quadratmonade; ferner $1^2 . 1^{0-2} = 1^{0-2+2} = 1^{0-1+1-1+1} = 1^{3.0}$ gleich der Cubikmonade, und so ferner $1^3 . 1^{0-3} = 1^{4.0}$. Daß dieses aber für beide Reihen allgemein gilt, erhellet daraus, wenn wir statt der Eins eine beliebige

Hosted by Google

andere Zahl setzen, z. B. 2. Denn dann wird die erste Reihe
$+2^4+2^3+2^2+2^1+2^0-2^0-2^1-2^2-2^3-2^4$; auch hier ist 2^0-2^0 gleich monadlich $0, 2^1-2^1=0', 2^2-2^2=0'', 2^3-2^3=0'''$, u. s. w. Ferner bei der zweiten Reihe
$+2^4+2^3+2^2+2^1+2^0+2^{0-1}+2^{0-2}+2^{0-3}+2^{0-4}$ ist 2^0 gleich 1^0, dem monadlichen Eins, $2^1.2^{0-1}=\frac{2^1.2^0}{2^1}=1^1.1^0=1^{2.0}$ gleich der Flächenmonade; ferner $2^2.2^{0-2}=\frac{2^2.2^0}{2^2}=\frac{2.2.2^0}{2.2}=1^0.1^0.1^0=1^{3.0}$, gleich der Cubikmonade und so weiter.

Endlich müssen auch die Einheiten mit verschiedenen Bruchexponenten unter sich verschiedene Einheiten sein; oder die Wurzeln aus der Einheit geben von dieser verschiedene Einheiten. Bei der Quadratzahl und Cubikzahl sagt es schon der Name selbst, daß ihre Einheiten sich verhalten zu denen ihrer Wurzeln, wie sich verhält die quadratische cubische Einheit zu der linearen. Es muß nemlich $\sqrt{1}$ gleich einer andern Einheit sein, als die unter dem Wurzelzeichen steht, weil sonst 1.1 oder 1^2 gleich 1 wäre, welches unmöglich; eben so ist $\sqrt[3]{1}$ gleich einer Einheit, deren dritte Potenz erst gleich der Einheit unter dem Wurzelzeichen, und so weiter $\sqrt[4]{1}$ gleich einer Einheit, deren vierte Potenz gleich der Einheit unter dem Wurzelzeichen. Folglich geben auch $1^{1/2}$, $1^{1/3}$, $1^{1/4}$, $1^{1/6}$ unter sich verschiedene Einheiten, und zwar so, daß die folgende eine unbedeutendere ausmacht, als die vorhergehende.

Anmerkung 1. Es wurde zwar im Vorstehenden angenommen, daß wenn $\frac{1}{1}=1^0$, so nun auch $1=1.1^0$, und wenn $2.1=2.1$, deßhalb auch $\frac{2}{2}=\frac{1}{1}$, oder auch $\frac{2}{2}=1^0$ sei; allein genau betrachtet kann dieses nur dann der Fall sein, wenn das Nichtseiende als ein im Gegensatz zum Seienden gleiches Nichtseiendes angesehen wird, ohne daß damit die Verschiedenheit des Nichtseienden unter sich in Betrachtung kommt. Denn eigentlich und genau folgt nicht daraus, wenn $\frac{1}{1}=1^0$, daß auch $1=1.1^0$, so wenig wie, da $2+1=2+1$, nun auch $2-2=1-1$ ist, so nemlich, daß das Nichtseiende von 2 gleich dem Nichtseienden von 1. Der Grund läßt sich leicht erkennen. Denn das Nichtseiende, die Nullen, bezeichnen nicht ein Quantitatives des Seienden oder des Endlichen, sondern vielmehr ein Qualitatives. Sieht man also bloß auf die Größe oder das quantitative Verhältniß, so muß jedes Nichtseiendes, weil

Hosted by Google

Druckfehler.

I. Seite 9 Zeile 6 von unten ſtatt „betrugen“ lies „betragen“.
„ 12 an der Figur ſtatt Fignr 15 lies Figur 15.

II. Seite 19 unterſte Zeile ſtatt MA lies HA.
„ 26 Z. 7 ſtatt nimmehrmehr ſetze nimmermehr.
„ 46. An der Fig. 27 zu Anfang des Quadranten fehlet die unterſte, aufrechtſtehende ſenkrechte h I.

III. Seite 60, Formel 232 ſtatt b i lies h i.
„ 74 unterſte Zeile ſtatt $(\pi + n \cdot \cos {}^2/_n R)$ lies $(\pi + n \cdot \sin {}^2/_n R)$.
„ 85 Formel 746 ſtatt $n(1 \cdot \sin {}^2/_n + R \cos {}^2/_n R)$ lies $n(1 + \sin {}^2/_n R + \cos {}^2/_n R)$.
„ 104 Z. 7 v. u. ſtatt ſo lies ſo.
„ 110 Z, 8 „ „ „ $(\beta\varphi + \varphi\delta + \delta\beta)$ lies $1/2(\beta\varphi + \varphi\delta + \delta\beta)$.
„ 117 unterſte Zeile ſtatt hślten lies halten.
„ 120 Z. 7 v. u. ſtatt (b o + o c + c b) lies $(b o + o c + c b)^2$.

IV. Seite 126 oben an der Figur fehlt die Bezeichnung Fig. 2.
„ 130 Z. 10 v. u. ſtatt fein lies ſein.
„ 132 Z. 6 ſtatt „der Hypotenuſe“ lies „die Hypotenuſe“.
„ „ Z. 11 ſtatt K′ lies K″.
„ „ Z. 15 ſtatt $= B C \sqrt{8}$ lies $= B C \sqrt{3} : B C \sqrt{8}$.
„ 134 Z. 12 (6 v. u.) ſtatt $\left(1+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\right)^2$ ſetze
$\left(1+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\right)^2\Big)$, alſo noch eine Klammer.
„ 142 Z. 6 nach dem Worte ausgedrückt fehlt folgende ganze Zeile:
„a b c d e f, und die zwölfte a b c d e f g h i k l m. Daher iſt auch die ſechste Kathete“.
Seite 145 Zeile 5 und 4 v. u. ſtatt 32,768 muß es beidesmal heißen 32768.
„ 151 „ 14 ſtatt n — 1ten lies n — 2ten.

V. Seite 164 Zeile 14 ſtatt ${}^2/_3$,1,7320508 lies ${}^2/_3 \cdot 1{,}7320508$.
„ 169 unterſte Zeile ſtatt $\dfrac{3bh - \overline{bh}^{-2}}{1 - 3bh} = \dfrac{2bh}{1 - \overline{bh}^{-2}}$ lies $\dfrac{3bh - \overline{bh}^{=2}}{1 - 3bh} - \dfrac{2bh}{1 - \overline{bh}^{-2}}$.
„ 170 Zeile 10 nach Halbmeſſer iſt ein Komma zu ſetzen.
„ 173 „ 8 nach „Vorigen“ iſt ein Punkt zu ſetzen.
„ 181 „ 3 von unten die Worte „der Coſinus von“ können wegbleiben.
„ 193 „ 9 „ „ ſtatt $\sqrt{3} \cdot bh$ lies $\sqrt{3} - bh$.
„ 196 unterſte Zeile ſtatt ∞ ſetze ∞.

VI. Seite 283 Zeile 17 ſtatt $= (1^0 + 1^0 + 1^0 + 1^0 + 1^0$ etc.) lies
$= 1 \cdot (1^0 + 1^0 + 1^0 + 1^0 + 1^0$ etc).
„ „ „ 2 v. u. nach „dagegen“ iſt noch zu ſetzen „zu“.
„ 284 „ 4 v. u. ſtatt $1^0 \cdot 1^{0-1} =$ ſetze $1' \cdot 1^{0-1} =$.
„ 286 „ 13 ſtatt $1 \cdot 1^0 = 1 \cdot 1^{3 \cdot 0}$ lies $1 \cdot 1^0 = 1 \cdot 1^{2 \cdot 0}$.

Hosted by Google